Chapitre 10

Dérivées partielles d'ordre 2 et extrema

10.1 Dérivées partielles secondes

Les dérivées partielles secondes (ou dérivées partielles d'ordre 2) sont les dérivées partielles des dérivées partielles.
Notation :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\ ,\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}\ .$$

Théorème 10.1.1 (Schwarz)**.** *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables. Si f admet des dérivées partielles secondes continues, alors :*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\ .$$

Définition 10.1.2. La fonction de plusieurs variables, $f : U \to \mathbb{R}$, est de classe C^2 si et seulement si ses dérivées partielles secondes existent et sont continues.

10.2 Formes quadratiques

Cas de deux variables : On appelle fonction quadratique de deux variables, toute fonction de la forme :

$$q(x_1, x_2) = rx_1^2 + 2sx_1x_2 + tx_2^2\ .$$

En écriture matricielle :

$$q(x_1, x_2) = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} r & s \\ s & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

En général, dans le cas de n variables :

$$q(x) = {}^t xSx \ ,$$

où S est une matrice $n \times n$ symétrique (${}^t S = S$).

Discussion du signe (cas de deux variables).
Pour : $q(x_1, x_2) = rx_1^2 + 2sx_1x_2 + tx_2^2$, $\Delta = s^2 - rt$.
Si $\Delta < 0$, alors $q(x_1, x_2)$ est strictement du signe de s pour $(x_1, x_2) \neq (0, 0)$.
Si $\Delta > 0$, alors $q(x_1, x_2)$ change de signe.

10.3 Formule de Taylor à l'ordre 2

Théorème 10.3.1 (Cas de deux variables)**.** *Soit f une fonction de deux variables de classe C^2 sur U. Pour (a_1, a_2) intérieur à U, on a :*

$$f(a_1 + h_1, a_2 + h_2) = f(a_1, a_2) + \mathrm{grad} f(a_1, a_2) \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} q(h_1, h_2) + (h_1^2 + h_2^2) o(1) \ .$$

où : $q(h_1, h_2) = rh_1^2 + 2sh_1h_2 + th_2^2$, $r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$, $t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$.

Théorème 10.3.2 (Cas général)**.** *Soit f une fonction de plusieurs variables de classe C^2 sur U. En un point a intérieur à U, on a :*

$$f(a + h) = f(a) + \mathrm{grad} f(a) \cdot h + + \frac{1}{2} {}^t h \cdot H_f(a) \cdot h + ||h||^2 o(1) \ .$$

où : $H_f(a)$ est la matrice des dérivées partielles secondes.

10.4 Application aux extrema

Cas de deux variables :
Soit $a = (a_1, a_2)$ un point critique d'une fonction de deux variables de classe C^2 ;
$r = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}$, $s = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}$ $t = \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}$, $\Delta = s^2 - rt$.
Si $\Delta < 0$, alors f a un extremum en a.
Si $\Delta > 0$, alors f a un *point selle* en a.

Fin du cours du 10/04

10.5 Preuve de la formule de Taylor

On montre le résultat plus précis suivant :

Théorème 10.5.1. *Soit f une fonction de plusieurs variables de classe C^2 sur U. Si le segment $[a, a+h]$ est dans U, il existe c sur ce segment tel que :*

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{grad} f(a) \cdot h + + \frac{1}{2} {}^t h \cdot H_f(c) \cdot h \ .$$

où : $H_f(c)$ est la matrice des dérivées partielles secondes en c.

10.6 Exemples de détermination d'extrema