Chapitre 1

Systèmes linéaires et matrices

Voir le chapitre 7 du cours polycopié.

1.1 Opérations sur les matrices

Définition des matrices, notation $Mat(m \times n, \mathbb{K})$ ($\mathbb{K}$ égal à $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).
Opérations sur les matrices, propriétés.
Matrices carrées inversibles. Formule pour les matrices carrés 2×2.
Ecriture matricielle d'un système linéaire, cas où la matrice est inversible.

1.2 La méthode du pivot

Opérations élémentaires sur les systèmes, notations : $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_i$, $L_i \leftrightarrow L_j$, $L_i \leftarrow \alpha L_i$ avec $\alpha \neq 0$.
Les opérations élémentaires conservent l'équivalence.
Opérations élémentaires sur les lignes d'une matrice ; lien avec la multiplication à gauche par les matrices élémentaires.
Matrice échelonnée, pratique de la méthode du pivot.
Discussion des systèmes échelonnés.

fin du cours du 23/01

Méthode pratique d'inversion des matrices.

1.3 Notions sur le déterminant

Théorème 1.3.1 (admis). *Il existe une unique application*

$$\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} \ ,$$

telle que :

1. *Si T est triangulaire, alors* $\det(T)$ *est le produit de ses termes diagonaux.*
2. *Si B est obtenu à partir de A par une transformation élémentaire sur les lignes, alors :*

$$\begin{aligned}
&\det(B) = \det(A) \textit{ pour une transformation } L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j\ ;\\
&\det(B) = -\det(A) \textit{ pour une transformation } L_i \leftrightarrow L_j\ ;\\
&\det(B) = \alpha \det(A) \textit{ pour une transformation } L_i \leftarrow \alpha L_i.
\end{aligned}$$

Pour une matrice 2×2, on a

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc\ .$$

Proposition 1.3.2. *Pour un matrice 3×3 :*

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

on a :

$$\det(A) = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix}\ .$$

Proposition 1.3.3. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*