Chapitre 2

Espaces vectoriels

2.1 Sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{C}^n$

Notation $\mathbb{K}$ pour $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

Définition 2.1.1. Une partie F de $\mathbb{K}^n$ est un sous-espace vectoriel si et seulement si elle contient l'élément nul 0_n, et est stable par combinaison linéaire.

Exemples 2.1.2.

1. L'espace solution d'un système linéaire homogène : $AX = 0_m$, $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$.
2. L'intersection de sous-espaces vectoriels.
3. Pour une partie finie $G = \{g_1, \ldots, g_k\} \subset \mathbb{K}^n$, l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de G :
$$\mathcal{C}(G) = \{\lambda_1 g_1 + \cdots + \lambda_k g_k;\ \lambda_1 \in \mathbb{K}, \ldots, \lambda_k \in \mathbb{K}\}$$

Proposition 2.1.3. *$\mathcal{C}(G)$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant G.*

On appelle $\mathcal{C}(G)$ le sous-espace engendré par G.

Définition 2.1.4. Soit F un sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$. Le sous-ensemble G est une partie génératrice de F si et seulement si $\mathcal{C}(G)$ est égal à F.

fin du cours du 24/01

2.2 Espaces vectoriels

Voir le ch8 dans le polycopié.
Définition.
Exemples : $\mathbb{K}^n$, $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$, l'espace des applications de I dans $\mathbb{K}$ noté $\mathcal{A}(I, \mathbb{K})$ (I est un intervalle de $\mathbb{R}$, ou plus généralement un ensemble), l'ensemble des suites à valeurs dans un espace vectoriels E, noté $\mathcal{A}(\mathbb{N}, \mathbb{K})$.

Définition 2.2.1. Une partie F d'un espace vectoriel E est un sous-espace vectoriel si et seulement si elle contient l'élément nul 0_E, et est stable par combinaison linéaire.

Exemples.

Proposition 2.2.2. *Soit G une partie finie d'un espace vectoriel E. L'ensemble $\mathcal{C}(G)$ des combinaisons linéaires des éléments de G est le plus petit sous-espace vectoriel contenant G.*

Définition 2.2.3. On dit que G est une partie génératrice du sous-espace vectoriel F si et seulement si $\mathcal{C}(G) = F$.

Proposition 2.2.4. *Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.*
a) L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.
b) La somme $F + F' = \{x + x';\ x \in F,\ x' \in F'\}$ de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vectoriel.

2.3 Base et dimension

Définition 2.3.1. $B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de l'espace vectoriel E si et seulement si tout vecteur u de E s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des e_i.

Proposition 2.3.2. *$B = (e_1, \ldots, e_n)$ est une base de E si et seulement si :*

a) B engendre E, et
b) le vecteur nul de E est à écriture unique comme combinaison linéaire des e_i (les e_i sont indépendants).

Théorème 2.3.3. *Si un espace vectoriel a une base formée de n vecteurs, alors toutes les bases ont n vecteurs.*

Définition 2.3.4. Un espace vectoriel E est de dimension finie si et seulement s'il admet une base fini. Dans ce cas la dimension de E est le nombre d'éléments d'une base.

Proposition 2.3.5. *Dans un espace vectoriel de dimension n :*

a) toute partie génératrice a au moins n vecteurs ;
b) tout ensemble de vecteurs indépendants a au plus n éléments ;
c) toute partie génératrice composée de n vecteurs forme une base ;
d) tout ensemble de n vecteurs indépendants forme une base.

fin du cours du 30/01

2.4 Notion sur le rang

Définition 2.4.1. Soit G un ensemble fini d'un espace vectoriel E. Le rang de G, noté $\mathrm{rg}(G)$ est la dimension du sous-espace vectoriel engendré par G.

Définition 2.4.2. Soit A une matrice de $\mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$. Le rang de A est la dimension du sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}^n$ engendré par les colonnes de A, noté $\mathrm{Col}(A)$.

Proposition 2.4.3. *Les transformations élémentaires sur les colonnes ne changent pas l'espace engendré par les colonnes, et donc conservent le rang.*

On peut suivre la méthode du pivot pour échelonner une matrice suivant les colonnes.

Proposition 2.4.4. *Pour une matrice A échelonnée suivant les colonnes, les colonnes non nulles forment une base de* $\mathrm{Col}(A)$*, et donc le rang est le nombre de colonnes non nulles.*

Exemple.