Chapitre 3

Applications linéaires

Voir ch9 du polycopié.

3.1 Applications linéaires et dimension

Définition 3.1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si elle respecte les combinaisons linéaires.

Exemple.

Définition 3.1.2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et $f : E \to F$ une application linéaire.
a) Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des vecteurs de E d'image nulle.
b) L'image de f est $\mathrm{Im}(f) = f(E)$.

Proposition 3.1.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et $f : E \to F$ une application linéaire.*
a) Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.
b) L'image de f est un sous-espace vectoriel de F.
c) L'image $f(E')$ de tout sous-espace vectoriel de E est un sous-espace vectoriel de F.
d) L'image inverse $f^{-1}(F')$ de tout sous-espace vectoriel de F est un sous-espace vectoriel de E.

Proposition 3.1.4. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et $f : E \to F$ une application linéaire.*
f est injective si et seulement si son noyau ne contient que le vecteur nul.

Remarques 3.1.5. a) f est surjective si et seulement si son image est égale à F.
b) Si f est bijective, l'image d'une base de E est une base de F, et donc E et F ont la même dimension.

Théorème 3.1.6. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire, alors la somme des dimensions du noyau et de l'image de f est égale à la dimension de E.*

Application aux systèmes linéaires. Soit $A \in \mathrm{Mat}(n \times m, \mathbb{K})$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^n \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$$

est linéaire, et son noyau est la solution de l'équation $Ax = 0_n$. La dimension de l'espace soulution est $n - \mathrm{rg}(A)$, et le rang de A est donc égal au nombre de pivots de la forme échelonnée (suivant les lignes).

fin du cours du 31/01

3.2 Matrice d'une application linéaire

Exemple.

Définition 3.2.1. Soient E et E' des espaces vectoriels de bases respectives : $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B = (e'_1, \ldots, e'_m)$. La matrice de l'application linéaire $g : E \to E'$, notée $\mathrm{Mat}(g, B, B')$ est la matrice $m \times n$ dont les colonnes sont les coordonnées dans la base B' des images des vecteurs de base :

$$\mathrm{Mat}(g, B, B') = \big([g(e_1)]_[B'] \ \ldots \ [g(e_1)]_[B']\big) \ .$$

Dans le cas où $E = E'$, et $B = B'$, on note : $\mathrm{Mat}(g, B, B')$, ou simplement $[g]_B$.

Proposition 3.2.2. *Avec les notations précédentes, g est l'application linéaire de matrice M dans les bases B et B' si et seulement si pour tout $u \in E$,*

$$[g(u)]_{B'} = M[u]_B \ .$$

Remarque 3.2.3. Dans le cas des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ il y a une base préférée, appelée base canonique, mais il peut être utile de considérer une autre base mieux adaptée au problème.

3.3 Changement de base

Définition 3.3.1. Soient $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases du même espace vectoriel E. On applelle matrice de passage de B à B' la matrice P dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs e'_j dans la base B.

Proposition 3.3.2. *Avec les notations précédentes, P est la matrice de passage de B à B' si et seulement si le changement de coordonnées est donné par la formule :*

$$[u]_B = P[u]_{B'} \ .$$

Théorème 3.3.3. *Soient $B = (e_1, \ldots, e_n)$ et $B = (e'_1, \ldots, e'_n)$ deux bases du même espace vectoriel E, et g une application linéaire de E dans E. Alors les matrices de g dans les bases B et B' sont reliées par la formule :*

$$\mathrm{Mat}(g, B') = P^{-1}\mathrm{Mat}(g, B)P \ .$$

Remarque 3.3.4. De façon plus générale pour une application linéaire g entre deux espaces vectoriels chacun muni de deux bases, la formule est :

$$\mathrm{Mat}(g, B', B'_1) = Q^{-1}\mathrm{Mat}(g, B, B_1)P \ .$$

3.4 Projections et symétries vectorielles

Définition 3.4.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur u de E s'exprime de manière unique sous la forme $u = u' + u''$, avec $u' \in F$ et $u'' \in G$. On écrit alors : $E = F \oplus G$.

Proposition 3.4.2. *Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si et seulement si :*

$$E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\} \ .$$

Définition 3.4.3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans l'espace vectoriel E. La projection vectorielle sur F de direction G est l'application qui a un vecteur décomposé $u = u' + u''$ associe u'.

La projection vectorielle sur F de direction G est une application linéaire. Dans une base obtenue en juxtaposant un base de F et une base de G, la matrice est diagonale, avec valeurs diagonales égales à 1 pour les vecteurs de F et 0 pour les vecteurs de G.

Définition 3.4.4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans l'espace vectoriel E. La symétrie vectorielle par rapport à F de direction G est l'application qui a un vecteur décomposé $u = u' + u''$ associe $u' - u''$.

La symétrie vectorielle par rapport à F de direction G est une application linéaire. Dans une base obtenue en juxtaposant un base de F et une base de G, la matrice est diagonale, avec valeurs diagonales égales à 1 pour les vecteurs de F et -1 pour les vecteurs de G.

fin du cours du 06/02