Chapitre 4

Algèbre linéaire et géométrie

4.1 Structure euclidienne sur $\mathbb{R}^n$

Définition 4.1.1. Le produit scalaire de deux vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est :

$$(x.y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

Définition 4.1.2. La transposée ${}^tM$ d'une matrice M est obtenue en intervertissant les lignes et les colonnes, en particulier en transposant un vecteur colonne on obtient un vecteur ligne.

Remarque 4.1.3. Le produit scalaire peut s'écrire :

$$(x.y) = {}^txy = {}^tyx \ .$$

Définition 4.1.4. La norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$ est :

$$||x|| = \sqrt{(x.x)} \ .$$

Proposition 4.1.5 (Cauchy-Schwarz)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ |(x.y)| \leq ||x|| \times ||y|| \ .$$

Proposition 4.1.6 (Inégalité triangulaire)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \ .$$

En plus de l'inégalité triangulaire, la norme euclidienne satisfait les deux propriétés suivantes (définition générale d'une norme) :
a) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| = 0 \iff x = 0_n$;
b) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}\ , ||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$.

Définition 4.1.7. a) Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
b) Une base est orthonormée si et seulement si ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

Le procédé qui suit construit une base orthonormée.

Proposition 4.1.8 (Orthonormalisation)**.** *Pour toute base* $(e_1, \ldots, e_n)$ *de* $\mathbb{R}^n$*, le procédé de récurrence :*
$\epsilon_1 = \frac{1}{||e_1||} e_1,$
$\epsilon'_2 = e_2 - (e_2.\epsilon_1)\epsilon_1\ ,\ \epsilon_2 = \frac{1}{||\epsilon'_2||}\epsilon'_2,$
$\ldots$
$\epsilon'_k = e_k - \sum_{i=1}^{k-1}(e_k.\epsilon_i)\epsilon_i\ ,\ \epsilon_k = \frac{1}{||\epsilon'_k||}\epsilon'_k,$
$\ldots$
construit une base orthonormée $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n)$ *telle que pour tout* k *:*
$\mathcal{C}(e_1, \ldots, e_k) = \mathcal{C}(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_k)$.

Définition 4.1.9. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble noté $F^\perp$ des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.

Proposition 4.1.10. *Pour tout sous-espace* F *de* $\mathbb{R}^n$*,* $F^\perp$ *est un sous-espace supplémentaire de* F*.*

Proposition 4.1.11. *Soit* $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ *une base orthonormée du sous-espace vectoriel* F*, alors la projection orthogonale sur* F *(de direction* $F^\perp$*),* p_F*, est telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ ,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p}(x.\epsilon_i)\epsilon_i\ .$$

Définition 4.1.12. Une isométrie vectorielle est une application linéaire que conserve la norme.

Proposition 4.1.13. *Soit* f *une application linéaire de* $\mathbb{R}^n$ *dans* $\mathbb{R}^n$*. Il y a équivalence entre :*
a) f *est une isométrie vectorielle ;*
b) f *conserve le produit scalaire ;*
c) f *transforme une base orthonormée en une base orthonormée.*

Proposition 4.1.14. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et M sa matrice dans une base orthonormée. L'application f est une isométrie si et seulement si :* ${}^tMM = I_n$.

$$(\ I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \ \textit{est la matrice unité.})$$

fin du cours du 07/02

4.2 Complément sur le déterminant

Théorème 4.2.1. *Le déterminant d'un produit de matrices carrées est égal au produit des déterminants.*

Corollaire 4.2.2. *Pour toute matrice inversible P, le déterminant de P^{-1} est l'inverse du déterminant de P.*

Corollaire 4.2.3. *Pour toute matrice carrée A et pour toute matrice inversible P de même ordre que A, on a :*

$$\det(P^{-1}AP) = \det(P) \ .$$

Remarque 4.2.4. Cela veut dire que le déterminant n'est pas modifié lors d'un changement de base.

Théorème 4.2.5. *Toute matrice carrée a même déterminant que sa transposée.*

Corollaire 4.2.6. *Une matrice d'isométrie vectorielle est de déterminant* ± 1.

Cela permet de classifier les isométries vectorielles : une isométrie vectorielle est positive ou négative selon le signe de son déterminant.
Dans $\mathbb{R}^n$, cela permet également de classifier les bases orthonormées. On se sert de la base canonique $\mathcal{B}_0$ comme référence pour *l'orientation*. La matrice de passage de B_0 à une autre base orthonormée B est de déterminant ± 1.

Définition 4.2.7. Une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est directe si et seulement si la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ est de déterminant $+1$.

4.3 Isométries vectorielle de $\mathbb{R}^2$

Proposition 4.3.1. *Dans une base orthonormée une isométrie vectorielle positive a une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},$$

et une isométrie vectorielle négative a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}.$$

Dans les deux cas $a^2 + b^2 = 1$.

Proposition 4.3.2. *Une isométrie vectorielle négative de $\mathbb{R}^2$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle.*

Proposition 4.3.3. *Une isométrie vectorielle positive a la même matrice dans toute base orthonormée directe.*

La matrice dans une base orthonormée directe d'une isométrie vectorielle positive s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Définition 4.3.4. On appelle rotation vectorielle d'angle α l'isométrie vectorielle décrite ci-dessus.

Aire orientée et déterminant :

Proposition 4.3.5. *Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors $\det(u, v)$ est l'aire orientée du parrallélogramme "construit sur u et v".*

Remarque 4.3.6. Le déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est le même dans toutes les bases orthonormées directes.

4.4 Isométrie vectorielle de $\mathbb{R}^3$

On peut classifier les isométries vectorielles f de $\mathbb{R}^3$ suivant la dimension du sous-espace $\mathrm{Inv}(f)$ formé par les vecteurs invariants (égaux à leur image).

Théorème 4.4.1. *a) Pour toute isométrie vectorielle positive de $\mathbb{R}^3$, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

avec comme cas particulier l'application identique Id *et les symétries orthogonales par rapport à une droite vectorielle.*
b) Pour toute isométrie vectorielle négative de $\mathbb{R}^3$*, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

avec comme cas particulier l'homothétie de rapport -1 *:* $-\mathrm{Id}$*, et les symétries orthogonales par rapport à un plan vectoriel.*

Produit vectoriel et produit mixte.

Définition 4.4.2. Le produit vectoriel de deux vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ est le vecteur

$$x \wedge y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Proposition 4.4.3. *Pour tous les vecteurs* u, v *et* w *de* $\mathbb{R}^3$ *le produit scalaire* $((u\wedge v).w)$ *est égal au déterminant* $\det(u, v, w)$*.*

Définition 4.4.4. Le produit précédent est appelé le produit mixte de u, v et w. On peut le noter $[u, v, w]$.

Proposition 4.4.5. *a) Le produit vectoriel de* u *et* v *est nul si et seulement si* u *et* v *sont colinéaires.*
b) Soient u *et* v *deux vecteurs qui engendrent un plan vectoriel de base orthonormée* (e_1, e_2)*, et soit* (e_1, e_2, e_3) *la base orthonormée directe complétée, alors* $u \wedge v = \lambda k e_3$*, où* λ *est l'aire du parallélogramme construit sur* u *et* v*.*

Remarque 4.4.6. En particulier, avec les notations précédentes : $e_1 \wedge e_2 = e_3$. Ceci peut-être utile pour calculer e_3.