Chapitre 5

Intégration

cf ch15 du polycopié.

5.1 Sommes de Riemann

Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a, b]$. Pour $n \geq 1$, on subdivise l'intervalle $[a, b]$ en n intervalles de même diamètre ; on obtient la *subdivision* :

$$a_0 = a, a_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}, \ldots, a_n = a + n\frac{(b-a)}{n} = b \ .$$

On pose pour chaque k : $m_k = \inf_{a_{k-1} \leq t \leq a_k} f(t)$, et $M_k = \inf_{a_{k-1} \leq t \leq a_k} f(t)$, puis on forme les sommes (appelées sommes de Riemann) :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} m_k \ , \quad \text{et} \quad , \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} m_k \ .$$

Définition 5.1.1. La fonction f est intégrable sur $[a, b]$ si et seulement si les suites $(s_n)_{n \geq 0}$ et $(S_n)_{n \geq 0}$ convergent vers la même limite. Cette limite est l'intégrale de f sur $[a, b]$: $\int_a^b f(t)dt$.

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentant f dans la bande $a \leq x \leq b$. Cette aire est comptée avec un signe positif ou négatif suivant sa position par rapport à l'axe des abscisses.

Théorème 5.1.2. *a) Si f est monotone sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.*
b) Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.

L'énoncé b) est admis. La preuve de a) dans le cas où f est croissante repose sur les inégalités :

$$\forall n \ , \ s_0 \leq s_n \leq S_n \leq S_0 \ ,$$

$$S_n - s_n \le (f(b) - f(a))\frac{b-a}{n} \ .$$

Les s_{2^p}, $p \ge 0$, forment une suite croissante et majorée ; on note I_m la limite de cette suite. De même on note I_M la limite de la suite décroissante et minorée formée par les S_{2^p}, $p \ge 0$. La seconde inégalité ci-dessus montre que $I_m = I_M = I$. On a :

$$\forall n \ , s_n \le I \le S_n \ ,$$

et

$$I = \lim_{n\to+\infty} s_n = \lim_{n\to+\infty} S_n \ .$$

Théorème 5.1.3 (Limite des sommes de Riemann)**.** *Pour toute fonction f intégrable sur $[a,b]$ la suite de terme général*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

converge vers $\int_a^b f(t)dt$.

Corollaire 5.1.4. *Pour toute fonction f intégrable sur $[0,1]$ la suite de terme général*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$$

converge vers $\int_0^1 f(t)dt$.

5.2 Propriétés

Théorème 5.2.1. *a) Les fonctions intégrables sur $[a,b]$ forment un espace vectoriel sur lequel l'intégrale est linéaire.*
b) Positivité : L'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction positive sur $[a,b]$ est positive.
c) Relation de Chasles : Si f est intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, alors elle est intégrable sur $[a,c]$ et

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt \ .$$

Convention : $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.
Comme corollaire de la positivité :

Théorème 5.2.2. *a) Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et :*

$$\forall t \in [a,b] \ , f(t) \le g(t) \ ,$$

alors :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt \ .$$

b) Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \ .$$

5.3 Intégrale et primitive

Théorème 5.3.1. *Si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction G définie par :*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \ ,$$

est une primitive de f sur l'intervalle I (est dérivable de dérivée f).

Corollaire 5.3.2. *Si f est continue sur $[a,b]$, alors pour toute primitive de f sur un intervalle qui contient a et b, on a :*

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \ .$$