# Chapitre 7

# Calcul approché d'intégrales

## 7.1 Méthode des rectangles

Soit $f$ une fonction intégrable sur $[a,b]$. Pour $n > 0$, on pose : $h = \frac{b-a}{n}$. On rappelle que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ (sommes de Riemann) :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a+kh) \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a+kh)$$

convergent vers $I = \int_a^b f(t)dt$.

**Proposition 7.1.1** (Cas monotone)**.** *Si $f$ est monotone sur $[a,b]$, alors $s_n$ et $S_n$ donnent un encadrement de $I$ de diamètre majoré par : $\frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n}$.*

**Théorème 7.1.2.** *Si $f$ est de classe $C^1$, avec $|f'(t)| \leq M_1$ pour $t \in [a,b]$, alors $s_n$ et $S_n$ sont des valeurs approchées de $I$, et la valeur absolue de l'erreur est majorée par $\frac{M_1(b-a)^2}{2n}$.*

Fin du cours du 5/03

## 7.2 Méthode du milieu

**Théorème 7.2.1.** *Soit $f$ de classe $C^2$ sur $[a,b]$, de dérivée seconde majorée par $M_2$, $h = \frac{b-a}{n}$.*

$$I^m = h \sum_{k=1}^{N} f(a - \frac{h}{2} + kh)$$

*est une valeur approchée de $I = \int_a^b f(t)dt$, et*

$$|I - E^m| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2} \ .$$

## 7.3 Méthode des trapèzes

**Théorème 7.3.1.** *Soit $f$ de classe $C^2$ sur $[a, b]$, de dérivée seconde majorée par $M_2$, $h = \frac{b-a}{n}$.*

$$I^t = h \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a + (k-1)h) + f(a + kh)}{2}$$

*est une valeur approchée de $I = \int_a^b f(t)dt$, et*

$$|I - E^m| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \ .$$

## 7.4 Méthode de Simpson

**Théorème 7.4.1.** *Soit $f$ de classe $C^4$ sur $[a, b]$, de dérivée quatrième majorée par $M_4$ ; $h = \frac{b-a}{n}$.*

$$I^s = h \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a + (k-1)h) + f(a + kh) + 4f(a - \frac{h}{2} + kh)}{6}$$

*est une valeur approchée de $I = \int_a^b f(t)dt$, et*

$$|I - E^s| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4} \ .$$

Fin du cours du 6/03