Chapitre 8

Equations différentielles

cf : ch20 dans le polycopié.

8.1 Généralités

Dans une équation différentielle d'ordre n, l'inconnue est une fonction n fois dérivable. La forme générale est :

$$F(t, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 \ .$$

Ici y est la fonction inconnue de la variable t.

8.2 Equations différentielles linéaires d'ordre 1

Il s'agit des équations :

$$y' = a(t)y + b(t) \ .$$

Les fonctions a et b sont continues sur un intervalle I.
Le cas homogène : $y' = a(t)y$.

8.2.1 Cas à coefficient constant

Théorème 8.2.1. *La solution générale de l'équation homogène $y' = ay$ est :*

$$y(t) = Ce^{at}, \ (C \in \mathbb{R}).$$

(Elle est définie sur $\mathbb{R}$.)

Théorème 8.2.2. *Si b est une fonction continue sur I, et si g est une solution particulière de l'équation*

$$y' = ay + b(t) \ ,$$

alors la solution générale est : $y(t) = Ce^{at} + g(t)$, $(C \in \mathbb{R})$.

Proposition 8.2.3. *Si b est une fonction continue sur I, une solution particulière de l'équation*

$$y' = ay + b(t) \ ,$$

est : $g(t) = G(t)e^{at}$, où G est primitive sur I de $t \mapsto b(t)e^{-at}$.

Méthode de variation de la constante : utiliser le changement de fonction inconnue : $y(t) = C(t)e^{at}$.

8.2.2 Cas linéaire homogène

Théorème 8.2.4. *Si a est une fonction continue sur I, et si A est une primitive de a, alors la solution générale de l'équation homogène : $y' = a(t)y$ est :*

$$y(t) = Ce^{A(t)}, \quad (C \in \mathbb{R}) \ .$$

Remarque : On peut prendre $A(t) = \int_{t_0}^{t} a(s)ds$.

8.3 Cas avec second membre

Théorème 8.3.1. *Si a et b sont des fonctions continues sur I, si A est une primitive de a, et si g est une solution particulière de l'équation*

$$y' = a(t)y + b(t) \ ,$$

alors la solution générale est : $y(t) = Ce^{A(t)} + g(t)$, ($C \in \mathbb{R}$).

Proposition 8.3.2. *Si a et b sont des fonctions continues sur I, et si A est une primitive de a, une solution particulière de l'équation*

$$y' = a(t)y + b(t) \ ,$$

est : $g(t) = G(t)e^{A(t)}$, où G est primitive sur I de $t \mapsto b(t)e^{-A(t)}$.

Méthode de variation de la constante : utiliser le changement de fonction inconnue

$$y(t) = C(t)e^{A(t)} \ .$$

Fin du cours du 12/03

8.4 Equations différentielles linéaires d'ordre 2

Il s'agit des équations :

$$y'' = a(t)y' + b(t)y + c(t) \ .$$

Les fonctions a, b et c sont continues sur un intervalle I.
Le cas homogène : $y'' = a(t)y' + b(t)y$.

8.4.1 Cas homogène à coefficients constants

Il s'agit des équations :

$$y'' = ay' + by \ .$$

L'équation du second degré : $\lambda^2 - a\lambda - b = 0$ s'appelle l'équation caractéristique.

Théorème 8.4.1. *Les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation homogène : $y'' = ay + b$ forment un espace vectoriel de dimension 2.*
a) Si l'équation caractéristique a deux solutions réelles λ_1 et λ_2, alors :

$$y_1(t) = e^{\lambda_1 t}, \text{ et } y_2(t) = e^{\lambda_2 t}$$

forment une base de l'espace des solutions.
b) Si l'équation caractéristique a une solution double λ, alors :

$$y_1(t) = e^{\lambda t}, \text{ et } y_2(t) = te^{\lambda t}$$

forment une base de l'espace des solutions.
b) Si l'équation caractéristique a deux solutions complexes conjuguées $\lambda = \lambda' + i\lambda''$ et $\overline{\lambda} = \lambda' - i\lambda''$, alors :

$$y_1(t) = e^{\lambda' t}\cos(\lambda'' t), \text{ et } y_2 = e^{\lambda' t}\sin(\lambda'' t)$$

forment une base de l'espace des solutions.

Lemme 8.4.2. *Pour t_0 fixé l'application qui a une solution y associe $(y(t_0), y'(t_0)) \in \mathbb{R}^2$ est un isomorphisme entre l'espace des solutions et $\mathbb{R}^2$.*

Corollaire 8.4.3. *Pour t_0 fixé, l'équation : $y'' = ay' + by$ a une unique solution qui vérifie les conditions initiales $y(t_0) = y_0$, $y'(t_0) = v_0$.*

Fin du cours du 13/03

8.4.2 Cas à coefficients constants avec second membre

Théorème 8.4.4. *On suppose que c est une fonction continue sur l'intervalle I. Si g est une solution particulière de l'équation*

$$y'' = ay' + by + c(t) \ ,$$

alors la solution générale sur I est : $y(t) = C_1y_1(t) + C_2y_2(t) + g(t)$, $(C \in \mathbb{R})$, où y_1 et y_2 forme une base de solution de l'équation homogène.

Méthode de variation de la constante : utiliser le changement de fonction inconnue

$$y(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t) \ ,$$

où y_1 et y_2 forme une base de solution de l'équation homogène ; avec l'équation additionnelle :

$$C_1'(t)y_1(t) + C_2'(t)y_2(t) = 0 \ ,$$

on obtient un système qui détermine C_1' et C_2'.

Fin du cours du 26/03

Proposition 8.4.5. *Avec les notations précédentes, si on a pour tout $t \in I$:*

$$\left\{ \begin{array}{lcl} y_1(t)C_1'(t) + y_2(t)C_2'(t) & = & 0 \\ y_1'(t)C_1'(t) + y_2'(t)C_2'(t) & = & c(t) \end{array} \right.$$

alors $g(t) = C_1(t)y_1(t) + C_2(t)y_2(t)$, est une solution particulière.

8.5 Exemples d'équations différentielles générales et de méthodes

8.5.1 Equations à variables séparables

On appelle équation différentielles à variables séparables :

$$y' = f(t)g(y) \ ,$$

avec f continue sur l'intervalle I, g continue sur l'intervalle J.

Proposition 8.5.1. *Si $g(a) = 0$, alors $g(t) = a$ est une solution constante.*

Proposition 8.5.2. *On suppose que g ne s'annulle pas sur J. Si W est une primitive de $\frac{1}{g}$, et si F est une primitive de f, alors l'équation : $y' = f(t)g(y)$, $t \in I$ et $y \in J$ est équivalente à :*

$$W(y) = G(t) + C \ , \ C \in \mathbb{R} \ .$$

Remarque : la fonction W est admet une fonction réciproque : on pourra exprimer y comme fonction, de t.

Fin du cours du 27/03

8.5.2 Changement de fonction inconnue

Exemple.

8.5.3 Equations non autonomes et raccordement de solutions

Une équation différentielle d'ordre 1 autonome est de la forme : $y' = f(t, y)$; on dit aussi qu'elle est résolue dans la dérivée.
Dans la cas d'une équation non autonome : $g(t)y' = f(t, y)$, il y a lieu de discuter l'annulation de g et découper la résolution en plusieurs intervalles d'étude. En dernier lieu on étudie le raccordement des solutions. On obtient un raccordement de classe C^1 en égalisant les limites à gauche et à droite des solutions et de leurs dérivées en un point de transition (valeur de t qui annulle g).
Exemple.