Chapitre 9

Fonctions de plusieurs variables

9.1 Généralités

On s'intéresse aux applications :

$$f : U \to \mathbb{R} \ ,$$

avec $U \subset \mathbb{R}^n$.
Exemples : cas $n = 2$ et $n = 3$.

Définition 9.1.1. Le graphe de f est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^{n+1}$:

$$G_f = \{(x_1, \ldots, x_n, y),\ y = f(x_1, \ldots, x_n)\} \ .$$

Dans le cas $n = 1$, c'est une courbe ; dans le cas $n = 2$ c'est une surface.

Définition 9.1.2. Pour $k \in \mathbb{R}$, l'ensemble de niveau k est :

$$\{(x_1, \ldots, x_n),\ f(x_1, \ldots, x_n) = k\} \subset \mathbb{R}^n \ .$$

Dans le cas $n = 2$, on obtient des courbes de niveau ; dans le cas $n = 3$, on obtient des surfaces de niveau.

9.2 Topologie de $\mathbb{R}^n$

La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^n$ définit une distance qui va permettre d'étudier limites et continuité des fonctions de plusieurs variables.

Définition 9.2.1. La norme euclidienne de $x = (x_1, \ldots, x_n)$ est :

$$||x|| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \ .$$

Proposition 9.2.2. *a)* $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $||x|| = 0 \iff x = 0_n$.
b) $\forall x \in \mathbb{R}^n$, $\forall \lambda \in \mathbb{R}$, $||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$.
c) $\forall x \in \mathbb{R}^n$,$\forall x \in \mathbb{R}^n$, $||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$.

La norme permet de définir une distance : $d(x, y) = ||x - y||$, et les notions de limites et continuité.

Définition 9.2.3. Une suite $X(n)$, $n \geq 0$, de vecteurs dans $\mathbb{R}^n$ converge vers $a \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si $\lim_{n\to\infty} ||X(n) - a|| = 0$.

Définition 9.2.4. Soit U une partie de $\mathbb{R}^n$. Un vecteur $a \in \mathbb{R}^n$ est adhérent à U si et seulement si a est dans U, ou il existe une suite de points de U qui converge vers a.

Définition 9.2.5. Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U et $a \in \mathbb{R}^n$ un vecteur adhérent à U. La fonction f a pour limite $l \in \mathbb{R}$ lorsque x tend vers a si et seulement si la distance $|f(x) - l|$ est aussi petite qu'on veut, pourvu que x soit suffisamment proche de a.

$$\forall \epsilon > 0 \ , \ \exists \alpha > 0 \ / \ \forall x \in U \ , \ ||x - a|| < \alpha \Rightarrow |f(x) - l| < \epsilon \ .$$

Définition 9.2.6. Soient U une partie de $\mathbb{R}^n$, $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur U et a un vecteur dans U. La fonction f est continue en a si et seulement si elle admet en a la limite $f(a)$. La fonction f est continue sur le sous-ensemble $V \subset U$ si et seulement si elle est continue en tout $a \in V$.

Résultats *généraux* : les applications coordonnées sont continues, la somme et le produit d'applications continues sont continues, le quotient d'une application continue par une application continue qui ne s'annulle pas est continu.

9.3 Applications partielles

Cas de deux variables : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de deux variables, définie sur $U \subset \mathbb{R}^2$. Pour $(a, b) \in U$, les applications

$$f(\cdot, b) = (x \mapsto f(x, b)) \quad \text{et} \quad f(a, \cdot) = (y \mapsto f(a, y))$$

sont appellées respectivement : la première application partielle en b, et la seconde application partielle en a.
La continuité de f entraîne la continuité des applications partielles ; la réciproque est fausse. Exemple.
Cas de trois variables ou plus.

9.4 Dérivées partielles

Les dérivées partielles de $f : U \to \mathbb{R}$, fonction de plusieurs variables définie sur $U \subset \mathbb{R}^n$, sont les dérivées des applications partielles.
Cas de deux variables : les dérivées partielles de $f(x, y)$ en (a, b) sont notées :

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a, b) \ , \ \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a, b) \ .$$

fin du cours du 03/04

Cas général : les dérivées partielles de $f(x_1, \ldots, x_n)$ en $a = (a_1, \ldots, a_n)$ sont notées :

$$(\frac{\partial f}{\partial x_i})(a) \ .$$

Le vecteur formé par les dérivées partielles s'appelle le gradient :

$$\mathrm{grad} f(a) = \left((\frac{\partial f}{\partial x_1})(a), \ldots, (\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)(a)) \ .$$

9.5 Différentiabilité

Les dérivées partielles permettent d'approximer un accroissement de la fonction dans les directions de coordonnées :

$$f(a+h, b) = f(a) + (\frac{\partial f}{\partial x})(a, b)h + ho(1)$$

La notation $o(1)$ remplace n'importe quelle fonction de limite nulle (ici quand h tend ves zéro). La notion de différentiabilité exprime l'accroissement de la fonction dans toutes les directions.

Définition 9.5.1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de n variables qui admet des dérivées partielles en $a \in U$. La fonction f est différentiable en a si et seulement s'il existe une fonction ϵ de limite nulle quand la variable h tend vers le vecteur nul $0_n \in \mathbb{R}^n$ telle que :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{grad} f(a) \cdot h + ||h||\epsilon(h) \ .$$

On écrit aussi :

$$f(a+h) = f(a) + \mathrm{grad} f(a) \cdot h + ||h||o(1) \ .$$

Théorème 9.5.2. *Si les dérivées partielles existent et sont continues sur U, alors f est différentiable en tout a de U.*

Remarque 9.5.3. Lorsque les dérivées partielles existent et sont continues sur U, on dit que f est de classe C^1 sur U.

9.6 Accroissements finis

Théorème 9.6.1. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables différentiable sur U. Si U contient le segment $[x, y]$, alors il existe un point c de ce segment $[x, y]$ tel que :*

$$f(y) - f(x) = \mathrm{grad} f(c) \cdot (y - x) \ .$$

Corollaire 9.6.2. *Si la fonction de plusieurs variables f a un gradient nul sur un ensemble U dans lequel deux points quelconques peuvent toujours être reliés par une* ligne brisée *(suite de segments consécutifs), alors f est constante sur U.*

Dérivée suivant un vecteur (ou dérivée *directionnelle*) :

Définition 9.6.3. Soit f une fonction de n variables, différentiable en $a \in U$. Pour $v \in \mathbb{R}^n$ le nombre $\mathrm{grad} f(c) \cdot v$ s'appelle la dérivée (directionnelle) de f en a suivant le vecteur v.

Interprétation : La dérivée (directionnelle) de f en a suivant le vecteur v est la dérivée en 0 de $t \mapsto f(a+tv)$: suivant le signe du produit scalaire $\mathrm{grad} f(c) \cdot v$, le *niveau* augmente ou diminue quand on se déplace dans la direction et le sens du vecteur v. Quand le gradient est non nul en a, l'ensemble de niveau qui contient a admet un espace tangent orthogonal au gradient.
Cas de deux variables : la **droite tangente** à la ligne de niveau est orthogonale au gradient.
Cas de trois variables : le **plan tangent** à la surface de niveau est orthogonal au gradient.

9.7 Points critiques

Définition 9.7.1. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables, différentiable sur U. Un point critique de f est un points $a \in U$ qui annulle le gradient $\mathrm{grad} f(a) = 0_n$.

Définition 9.7.2. Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables. f admet un maximum local strict en $a \in U$ si et seulement si, il existe un rayon $r > 0$ tel que :

$$\forall x \in U \ , \ 0 < ||x - a|| < r \Rightarrow f(x) < f(a) \ .$$

On a de même les notions de minimum local strict, de maximum et de minimum au sens large.

Définition 9.7.3. Un point a est intérieur à un partie de $\mathbb{R}^n$ si et seulement s'il existe un rayon $r > 0$ tel que :

$$\forall x \ , \ ||x - a|| < r \Rightarrow x \in U \ .$$

Théorème 9.7.4. *Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de plusieurs variables, différentiable en un point a* intérieur *à U. Si f admet un extremum (au sens large) en a, alors a est un point critique.*