UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
Année 2007-2008, Licence 1, MP2
Mathématiques fondamentales

Examen du 16/05/08 (durée : 3 heures)

Document autorisé : résumé de cours manuscrit sur une page recto-verso de format A4 (21×29,7).
La calculatrice n'est pas autorisée.

Barême indicatif : $5+5+5+5$.

I

1. Résoudre l'équation différentielle homogène :

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \ .$$

2. On considère l'équation différentielle :

$$y'' - 2y' + 2y = \frac{2t^3}{3} - 2t^2 \quad (E) \ .$$

   (a) Trouver une solution particulière de (E) de la forme $g(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$.
   (b) Donner la solution générale de (E).
   (c) Montrer que (E) a une unique solution h qui vérifie : $h(0) = 0$ et $h'(0) = 0$, et calculer h.

II

1. Décomposer en élément simples la fraction rationelle :

$$f(t) = \frac{t}{(1+t)^2(1+t^2)} \ .$$

2. On veut calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\sin x} dx \ .$$

   (a) Enoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales, et appliquer à I le changement de variable $t = \tan \frac{x}{2}$.
   (b) Calculer I.

III

On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = 3xy + (y - x)^3$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f.
2. Quels sont les points critiques de f ?
3. Calculer les dérivées partielles secondes de f.
4. Quels sont les éventuels extrema locaux de f ?

IV

On note $u \wedge v$ le produit vectoriel de deux vecteurs de $\mathbb{R}^3$.

On rappelle que pour : $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$, $v = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, on a : $u \wedge v = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$.

Soit $n = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$. On considère l'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ qui à $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ associe $f(x) = n \wedge x$.

1. Ecrire la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer le noyau de f. Préciser sa dimension et en donner une base.
3. Montrer que l'image de f est un plan vectoriel P. Trouver une base orthonormée (e_1, e_2) de ce plan P.
4. Compléter la base de P en une base orthonormée (e_1, e_2, e_3) de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de f dans la base (e_1, e_2, e_3).