UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
Année 2007-2008, Licence 1, MP2
Mathématiques fondamentales

Examen du 16/05/08, corrigé

I

1. Résoudre l'équation différentielle homogène :

$$y'' - 2y' + 2y = 0 \ .$$

L'équation caractéristique, $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ a deux solutions complexes conjuguées : $1 \pm i$. La solution générale (réelle) de l'équation $y'' - 2y' + 2y = 0$ est :

$$y(t) = e^t(A\cos t + B\sin t) \ , A \in \mathbb{R}, \ B \in \mathbb{R} \ .$$

2. (a) $g(t) = at^3 + bt^2 + ct + d$, $g'(t) = 3at^2 + 2bt + c$, $g''(t) = 6at + 2b$.
$g''(t) - 2g'(t) + 2g(t) = 2at^3 + (2b - 6a)t^2 + (2c - 4b + 6a)t + (2d - 2c + 2b)$.
g est solution si et seulement si :

$$\begin{cases} 2a &= \frac{2}{3} \\ 2b - 6a &= -2 \\ 2c - 4b + 6a &= 0 \\ 2d - 2c + 2b &= 0 \end{cases}$$

$$a = \frac{1}{3} \ , \ b = 0 \ , \ c = -1, \ d = -1 \ .$$

On obtient la solution particulière : $g(t) = \frac{1}{3}t^3 - t - 1$.

(b) La solution générale (réelle) de (E) est :

$$y(t) = e^t(A\cos t + B\sin t) + \frac{1}{3}t^3 - t - 1 \ , A \in \mathbb{R}, \ B \in \mathbb{R} \ .$$

(c) $y'(t) = e^t(A\cos t + B\sin t - A\sin t + B\cos t) + t^2 - 1$.
$y(0) = A - 1$, $y'(0) = A + B - 1$.
Les conditions initiales $y(0) = y'(0) = 0$ équivalent à : $A = 1$, $B = 0$.
L'unique solution est : $h(t) = e^t\cos t + \frac{1}{3}t^3 - t - 1$.

II

1. La décomposition en éléments simples de $f(t) = \frac{t}{(1+t)^2(1+t^2)}$ est de la forme :

$$f(t) = \frac{a}{1+t} + \frac{b}{(1+t)^2} + \frac{c+dt}{1+t^2} \ .$$

On obtient successivement :

$$\left(f(t)(1+t)^2\right)_{t=-1} = \frac{-1}{2} = b\ ,$$

$$\left(f(t)(1+t^2)\right)_{t=i} = \frac{1}{2} = c + di\ ,\ .$$

$$\lim_{t\to\infty} tf(t) = 0 = a + d\ .$$

Finalement : $b = \frac{-1}{2}$, $c = \frac{1}{2}$, $a = d = 0$.

$$f(t) = \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{(1+t)^2} + \frac{1}{1+t^2}\right)\ .$$

2. (a) Etant données une fonction g continue sur $[x_1, x_2]$, et une bijection u de classe C^1 de l'intervalle J sur $[x_1, x_2]$, avec J de bornes $t_1 = u^{-1}(x_1)$, $t_2 = u^{-1}(x_2)$, on a :

$$\int_{x_1}^{x_2} g(x)dx = \int_{t_1}^{t_2} g(u(t))u'(t)dt\ .$$

Application à I : $t = \tan\frac{x}{2}$, $x = 2\arctan t = u(t)$, $x_1 = 0$, $t_1 = 0$, $x_2 = \frac{\pi}{2}$, $t_2 = 1$; $\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$, $u'(t) = \frac{2}{1+t^2}$;

$$I = \int_0^1 \frac{\frac{2t}{1+t^2}}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \frac{2}{1+t^2}dt\ = \int_0^1 \frac{4t}{(1+t^2+2t)(1+t^2)}dt\ .$$

(b)

$$I = 4\int_0^1 f(t)dt = \int_0^1 \frac{-2}{(1+t)^2}dt + \int_0^1 \frac{2}{1+t^2}dt$$

$$I = \left[\frac{2}{1+t}\right]_0^1 + [2\text{Arctan}\, t]_0^1 = \frac{\pi}{2} - 1\ .$$

III

On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x,y) = 3xy + (y-x)^3$$

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3y - 3(y-x)^2$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x + 3(y-x)^2$.
2. Les points critiques sont les solutions du système :

$$\left\{\begin{array}{lcl} 3y - 3(y-x)^2 & = & 0 \\ 3x + 3(y-x)^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

   Le système est équivalent à :

$$\left\{\begin{array}{lcl} y & = & -x \\ x - 4x^2 & = & 0 \end{array}\right.$$

   On obtient deux points critiques : $(0,0)$ et $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$.
3. $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6(y-x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6(y-x)$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 3 - 6(y-x)$.
4. Les éventuels extrema locaux sont parmi les points critiques.
   En $(0,0)$, la matrice hessienne est :

$$H(f)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$$

   La forme quadratique correspondante est : $q(h,k) = 6hk$. Elle prend des valeurs strictement positives et strictement négatives. Le point singulier est un point selle.
   En $(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$, la matrice hessienne est :

$$H(f)_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

   La forme quadratique correspondante est : $q(h,k) = 3(h^2+k^2)$. Elle prend des valeurs strictement positives pour $(h,k) \neq (0,0)$. Le point singulier est un minimum local.

IV

1. Les colonnes de la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ sont les coordonnées des images des vecteurs de cette base :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -12 & 4 \\ 12 & 0 & -3 \\ -4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

2. Le noyau de f est la solution du système homogène de matrice M. On obtient la droite vectorielle de base de base n.

3. L'image de f est de dimension $3-1=2$. C'est un plan vectoriel P. On obtient une base de P avec les vecteurs formés par les deux premières colonnes de M. On observe que c'est le plan orthogonal à n ! Une base orthonormée de ce plan est (e_1, e_2) :

$$e_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{\sqrt{10}} \\ -\frac{1}{\sqrt{10}} \end{pmatrix} \ , \ e_2 = \frac{1}{||n||} n \wedge e_1 = \begin{pmatrix} \frac{-4\sqrt{10}}{13} \\ \frac{3}{13\sqrt{10}} \\ \frac{9}{13\sqrt{10}} \end{pmatrix} \ .$$

4. On complète en une base orthonormée avec $e_3 = \frac{1}{||n||} n = \begin{pmatrix} \frac{3}{13} \\ \frac{4}{13} \\ \frac{12}{13} \end{pmatrix}$. La matrice de f dans cette base est formée par les coordonnées des images des vecteurs de base :

$$M' = \begin{pmatrix} 0 & -13 & 0 \\ 13 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \ .$$