**UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7**
**Année 2007-2008, Licence 1, MP2**
**Mathématiques fondamentales**

**Examen partiel du 01/03/08 (durée : 3 heures)**
*Les documents et la calculatrice ne sont pas autorisées*

Barême indicatif : 8-8-4

## I

On note $B = (e_1, e_2, e_3)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit $g$ l'application linéaire définie par :
$g(e_1) = g(e_3) = e_3$ , $\quad g(e_2) = -e_1 + e_2 + e_3$.

1. Déterminer le noyau de cette application. Écrire la matrice $A$ de $g$ dans la base $B$.
2. On pose $f_1 = e_1 - e_3$, $f_2 = e_1 - e_2$, $f_3 = -e_1 + e_2 + e_3$. Calculer $e_1, e_2, e_3$ en fonction de $f_1, f_2, f_3$. Les vecteurs $f_1, f_2, f_3$ forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$ ?
3. Calculer $g(f_1), g(f_2), g(f_3)$ en fonction de $f_1, f_2, f_3$. Écrire la matrice $A'$ de $g$ dans la base $B' = (f_1, f_2, f_3)$ et trouver la nature de l'application $g$.
4. On pose $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Vérifier que $P$ est inversible et calculer $P^{-1}$. Quelle relation lie $A$, $A'$, $P$ et $P^{-1}$ ?

## II

Soient $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $D$ la droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ de base $k$, et $P$ le plan orthogonal à $D$.

1. Donner une base $k_1$ de $D$ de norme 1.
2. Calculer le projeté $e_1'$ du vecteur $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sur le plan $P$.
3. Calculer une base orthonormée directe $K = (k_1, k_2, k_3)$, avec $k_2$ colinéaire à $e_1'$.
4. Quelle est la matrice dans la base $K$ de la symétrie orthogonale $s_D$ par rapport à la droite $D$ ?
5. Calculer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale $s_D$.

## III

1. Quelle est la dérivée de la fonction Arctan ?
2. Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.
3. On pose :
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2 + k^2} \ .$$
   (a) Montrer que $s_n$ s'écrit sous la forme :
$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \ ,$$
   où $f$ est une fonction qu'on précisera.
   (b) Quelle est la limite quand $n$ tend vers $+\infty$ de la suite $s_n$ ?