UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
Année 2007-2008, Licence 1, MP2
Mathématiques fondamentales

Examen partiel du 01/03/08, corrigé

I

1. On note que $e_1 - e_3$ est dans le noyau. L'image de g est le plan de base $(e_3, -e_1+e_2+e_3)$. Donc le noyau est de dimension 1 et a pour base $f_1 = e_1 - e_3$. (On peut aussi poser et résoudre le système.)
$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
2. $e_1 = f_1 + f_2 + f_3$, $e_2 = f_1 + f_3$, $e_3 = f_2 + f_3$. Le calcul précédent montre que tout vecteur s'exprime comme combinaison linéaire de f_1, f_2, f_3. Ces trois vecteurs forment une partie génératrice dans $\mathbb{R}^3$ qui est de dimension 3 ; ils forment donc une base. (Il y a des tas d'autres manières de justifier.)
3. $g(f_1) = 0$, $g(f_2) = f_2$, $g(f_3) = f_3$.
$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
L'application g est la projection vectorielle sur le plan de base (f_2, f_3) de direction la droite de base f_1.
4. La matrice P est la matrice de passage de la base e à la base f ; elle est donc inversible et son inverse est la matrice de passage de f à e :
$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$
La formule de changement de base nous donne la relation :
$$A' = P^{-1}AP \ .$$

II

1. $||k|| = \sqrt{6}$, $k_1 = \frac{1}{||k||}k = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} \\ \frac{\sqrt{6}}{6} \end{pmatrix}$.
2. $e'_1 = e_1 - (e_1.k_1)k_1 = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{2}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

3. $k_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{3} \\ -\frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} \end{pmatrix}$, $k_3 = k_1 \wedge k_2 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
4. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.
5. $N = PMP^{-1}$, où P est la matrice de passage de la base canonique à la base K :

$$P = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{6}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & 0 \\ \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

La base K étant orthonormée, P^{-1} est la matrice transposée de P :

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{6}}{6} & \frac{\sqrt{6}}{3} & \frac{\sqrt{6}}{6} \\ \frac{\sqrt{3}}{3} & -\frac{\sqrt{3}}{3} & \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} .$$

$$N = \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} .$$

III

1. Pour $x \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Arctan}'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.
2. $\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \mathrm{Arctan}(1) = \frac{\pi}{4}$.
3. (a)

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{n^2+k^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n(1+\frac{k^2}{n^2})} ,$$

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}) \text{ , avec } f(x) = \frac{1}{1+x^2} .$$

(b) Il s'agit d'une suite de sommes de Riemann pour la fonction f sur $[0,1]$:

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = \frac{\pi}{4} .$$