Feuille d'exercices n°1

Arithmétique élémentaire

Exercice 1.

a) La différence de deux nombres est 538. Si l'on divise l'un par l'autre, le quotient est 13 et le reste 22. Quels sont ces nombres ?

b) On divise un entier positif $a \leqslant 85$ par un entier positif b. Le quotient est 3 et le reste est 19. Quelles sont les valeurs possibles de a et b ?

Exercice 2.

a) Donner la liste des entiers positifs qui divisent 100.

b) Combien le nombre 6000000 a-t-il de diviseurs positifs ?

Exercice 3. Trouver le pgcd et le ppcm de $a = 2^3 \times 3^5 \times 7^2$ et $b = 2 \times 5^2 \times 7^3$.

Exercice 4. Résoudre l'équation $37\,x + 53\,y = 1$ en nombres entiers.

Exercice 5. Soient a, b, c des entiers relatifs, où a et b ne sont pas tous les deux nuls. Montrer que l'équation $a\,x + b\,y = c$ admet des solutions entières si et seulement si c est un multiple du pgcd de a et b.

Exercice 6.

a) Calculer le pgcd de 637 et 595.

b) Trouver les entiers x et y tels que $637\,x + 595\,y = 91$.

c) Trouver les entiers x et y tels que $637\,x + 595\,y = 143$.

Exercice 7. Résoudre les équations suivantes en nombres entiers :

a) $283\,x + 1722\,y = 31$;

b) $365\,x + 72\,y = 18$;

c) $1111\,x + 2345\,y = 66$.

Exercice 8. Soient a et b des entiers non tous les deux nuls.

a) Montrer que pour tout entier x, $\mathrm{pgcd}(a, b + a\,x) = \mathrm{pgcd}(a, b)$.

b) Montrer que si x est un entier positif, $\mathrm{pgcd}(x\,a, x\,b) = x\,\mathrm{pgcd}(a, b)$.

c) Montrer que si x est un entier positif tel que $\mathrm{pgcd}(x, b) = 1$, alors $\mathrm{pgcd}(a\,x, b) = \mathrm{pgcd}(a, b)$.

Exercice 9. Soit n un entier.

a) Déterminer le pgcd de $9\,n + 15$ et $4\,n + 7$ en fonction de n.

b) Montrer que n^2 et $2\,n + 1$ sont premiers entre eux.

Exercice 10. Soit n un entier tel que $10 \leqslant n \leqslant 100$. Montrer que n est un nombre premier si et seulement si $\mathrm{pgcd}(n, 210) = 1$.

Exercice 11.

a) Décomposer 10! en produit de facteurs premiers.

b) Trouver la plus grande puissance de 2 qui divise 100! (Indication : compter le nombre de multiples de 2 qui sont $\leqslant 100$, puis le nombre de multiples de 4, puis le nombre de multiples de 8, etc.).

c) Trouver le nombre de zéros qui figurent à la fin de l'écriture décimale de 100!.

Exercice 12. Soit n un entier positif. Soit $a>1$ un diviseur entier de $n!+1$.
Montrer que $a>n$. En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers.

Exercice 13. Soit un entier $n \geqslant 1$. Montrer qu'il existe n nombres entiers consécutifs qui ne sont pas premiers. (Indication : prendre $(n+1)!+2$, $(n+1)!+3$, $\cdots$).

Exercice 14. Dans cet exercice, n désigne un entier naturel.

a) Vérifier que tout nombre premier $p \neq 2$ est de la forme $4\,n+1$ ou $4\,n+3$.

b) Soient p_1, p_2, $\cdots$, p_r des nombres premiers de la forme $4\ n\ +\ 3$. Vérifier que l'entier $4\,p_1\,p_2 \cdots p_r+3$ admet un diviseur premier de la forme $4\,n+3$.

c) En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4\,n+3$.

Exercice 15. Nombres de Fermat.
Les nombres $F_n = 2^{2^n}+1$ $(n \geqslant 0)$ sont appelés nombres de Fermat.

a) Soient b et m des entiers supérieurs ou égaux à 2. Montrer que si m est impair, alors b^m+1 est multiple de $b+1$.

b) Si 2^m+1 est premier, montrer que l'entier $m \geqslant 1$ est une puissance de 2.

c) Vérifier qu'on a

   i. $F_{n+1} = (F_n-1)^2+1$;

   ii. $F_n - 2 = \prod_{k=0}^{n-1} F_k$.

d) Montrer que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

e) En déduire une démonstration de l'existence d'une infinité de nombres premiers.

Exercice 16. Entiers parfaits et nombres de Mersenne.
Pour n entier naturel, on pose $\sigma(n) = \sum_{d|n} d$. Un entier n est dit parfait si $\sigma(n) = 2\,n$.
Les nombres $M_n = 2^n - 1$ sont appelés nombres de Mersenne.

a) Calculer $\sigma(n)$ en fonction de la décomposition en facteurs premiers de n.

b) Vérifier que 6 et 28 sont parfaits.

c) Vérifier les résultats suivants

   i. Si $M_n = 2^n - 1$ est premier $(n \geqslant 2)$, l'entier $2^{n-1}\ (2^n - 1)$ est pair et parfait (Euclide) ;

   ii. Montrer la réciproque de i (Euler).

d) Vérifier que si M_n est premier, n l'est aussi. La réciproque est-elle vraie ?