Université Paris 7 — Année 2008/09
Licence 2 - MI4 — Groupes & Arithmétique

Feuille d'exercices n°2

Groupes abéliens

Dans toute cette feuille, « groupe » signifie « groupe abélien ».

Exercice 1. Parmi les sous-ensembles suivants, précisez lesquels sont des sous-groupes :

a) $\{1,-1\}\subset(\mathbb{R}^*,\times)$;

b) $\{1,-1\}\subset(\mathbb{R},+)$;

c) $\mathbb{N}\subset\mathbb{Z}$;

d) $\mathbb{N}^*\subset\mathbb{Z}$;

e) $\mathbb{U}=\{z\in\mathbb{C}\colon |z|=1\}\subset(\mathbb{C}^*,\times)$.

Exercice 2. Soient G un groupe, $a,b\in G$ et $n\in\mathbb{Z}$. Montrer les relations suivantes :

a) $a\,b\,a^{-1}=b$;

b) $(a\,b)^{-1}=a^{-1}\,b^{-1}$;

c) $(a\,b)^n=a^n\,b^n$.

Exercice 3. Soient G un groupe et $x\in G$ un élément d'ordre r.

a) Si $r=1$, que vaut x ?

b) Quel est l'ordre de x^{-1} ?

c) Si $s\geqslant 1$ est un diviseur de r. Quel est l'ordre de x^s ?

d) Si $s\geqslant 1$ est premier à r, Quel est l'ordre de x^s ?

e) Donner une formule générale donnant l'ordre de x^s, lorsque $s\in\mathbb{Z}$.

Exercice 4. Soit G un groupe à deux éléments. Dresser la table de multiplication de G.

Exercice 5. Soit G un groupe à 4 éléments. Le but de cet exercice est de déterminer les structures possibles de G.

a) Montrer qu'il existe un élément non trivial $g\in G$ qui est son propre inverse.

b) On note h et k les deux élements de G différents de e et g. Déterminer les deux tables de multiplication de G possibles.

Exercice 6. On considère les applications $f_{a,b}\colon\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ définies par $f_{a,b}(x)=a\,x+b$ $(a,b\in\mathbb{Z})$.

a) Montrer que l'ensemble $T=\{f_{1,b}\colon b\in\mathbb{Z}\}$, muni de la composition, est un groupe.

b) Montrer que l'ensemble $H=\{f_{a,0}\colon a=\pm 1\}$, muni de la composition, est un groupe.

Exercice 7. Montrer que les applications suivantes sont des morphismes de groupes et indiquer si ce sont des isomorphismes :

a) L'application $\log\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+^*$;

b) L'application $\varphi\colon\mathbb{R}\to\mathbb{U}$ définie par $\varphi(x)=\mathrm{e}^{2\mathrm{i}\pi x}$.

Exercice 8. Soient G un groupe et $n\in\mathbb{Z}$ un entier.

a) Montrer que l'application $\varphi\colon G\to G$ définie par $\varphi(g)=g^n$, est un morphisme de groupes.

b) Qu'en déduit-on sur les ensembles $\{g\in G\colon g^n=e\}$ et $\{g^n\colon g\in G\}$?

Exercice 9. Soit $\varphi\colon G \to G'$ un isomorphisme de groupes. Montrer que, pour tout $x \in G$, x et $\varphi(x)$ sont de même ordre.

Exercice 10. Montrer que l'application $\varphi\colon G \to G$, définie par $\varphi(x) = x^{-1}$, est un automorphisme de G.

Exercice 11. Si G est un groupe fini, montrer chaque ligne et chaque colonne à l'intérieur de sa table de multiplication comporte la liste des éléments de G, sans répétition.

Exercice 12. Soit un entier $n \geqslant 1$. On considère l'ensemble μ_n des racines n^{e} de l'unité dans $\mathbb{C}$.

a) Décrire les éléments de μ_n.

b) Montrer que μ_n est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*, \times)$.

c) Donner l'ordre des éléments $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}\pi}{n}}$, $\mathrm{e}^{\frac{2\mathrm{i}k\pi}{n}}$ $(k \in \mathbb{Z})$.

d) À quelle condition sur l'entier $d \geqslant 1$ existe-t-il un élément d'ordre d dans μ_n ?

Exercice 13. On considère le sous-groupe $\mu_4 \subset (\mathbb{C}^*, \times)$

a) Quels sont les éléments de μ_4.

b) Déterminer l'ordre de l'élément i.

c) Déterminer i^{2009}.

d) À quelle condition sur les entiers k, l a-t-on $\mathrm{i}^k = \mathrm{i}^l$?

Exercice 14. Soit G un groupe et $x \in G$ un élément d'ordre r. On considère la suite $(x^r)_{r \in \mathbb{N}}$.

a) Montrer que les r premiers éléments de cette suite sont deux à deux distincts.

b) Montrer que ces r premiers éléments forment un sous-groupe de G dont on précisera l'ordre.

c) Montrer que ce sous-groupe est le plus petit sous-groupe de G contenant x.

d) Montrer que la suite $(x^r)_{r \in \mathbb{N}}$ est périodique, de plus petite période r.

Exercice 15. Soient p un nombre permier, G un groupe d'ordre p.

On fixe un élément non trivial $x \in G$ et l'on définit l'application $f\colon \{0, 1, \cdots, p-1\} \to G$ par $f(k) = x^k$.

a) Montrer que cette application f est bijective.

b) Dresser la table de multiplication de G.