

# Chapitre 1

## Théorie des noeuds

### 1.1 Notions de base

**Définition 1.1.1.** Un noeud  $K$  dans  $\mathbb{R}^3$  est une sous-variété difféomorphe au cercle.

*Remarque 1.1.2.* On précisera le cas échéant la classe de différentiabilité. Par défaut on considérera des noeuds de classe  $C^1$ . On pourrait également considérer des noeuds linéaires par morceau.

*Exemple 1.1.3.* Le noeud trivial :  $S^1 \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ .

*Exemple 1.1.4.* La sphère unité de  $\mathbb{C}^2$  est notée  $S^3$ . On utilisera la projection stéréographique  $s : S^3 \setminus \{(0, i)\} \cong \mathbb{R}^3$ . Pour  $p$  et  $q$  premiers entre eux le noeud torique  $K_{p,q}$  est l'image du plongement :

$$\begin{aligned}\gamma_{p,q} : S^1 &\mapsto \mathbb{R}^3 \\ z &\mapsto s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(z^p, z^q)\right)\end{aligned}$$

*Exercice 1.1.5.* Calculer un paramétrage du noeud  $K_{p,q}$ . Dessiner la projection sur le premier plan de coordonnées de  $K_{2,3}$  et  $K_{3,2}$ .

**Définition 1.1.6.** Un entrelacs  $L$  à  $n$  composantes dans  $\mathbb{R}^3$  est une sous-variété difféomorphe à l'union disjointe de  $n$  cercles

**Définition 1.1.7.** Une isotopie entre les deux noeuds  $K$  et  $K'$  dans  $\mathbb{R}^3$  est une application continue

$$\begin{aligned}h : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\mapsto h(t, x) = h_t(x)\end{aligned}$$

telle que :  $h_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$ ,  $h_1(K) = K'$ , pour tout  $t$ ,  $h_t$  est un difféomorphisme.

Les deux noeuds  $K$  et  $K'$  sont isotopes si et seulement s'il existe une isotopie entre eux. Si les noeuds  $K$  et  $K'$  sont orientés, on demande de plus que  $h_1$  respecte les orientations.

*Remarque 1.1.8.* La même définition vaut pour les entrelacs. il convient de préciser si les composantes sont ordonnées ou non.

Le problème fondamental en théorie des nœuds est la classification à isotopie près. On obtient une classification a priori plus fine si on prend en compte l'orientation.

**Définition 1.1.9.** Un nœud est inversible si et seulement s'il est isotope au nœud muni de l'orientation opposée.

Il existe des nœuds non inversibles. Il est difficile de trouver des invariants qui les détectent.

**Définition 1.1.10.** Le miroir d'un nœud  $K$  est l'image de  $K$  par la réflexion  $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ . Un nœud est (positivement) amphichéral si et seulement s'il est isotope à son miroir.

**Définition 1.1.11.** Un diagramme de nœud est une immersion générique d'un cercle dans le plan orienté  $\mathbb{R}^2$ , avec une information *dessus-dessous* en chaque point double. Ici générique signifie que les éventuels points multiples sont des points doubles à tangentes distinctes.

A chaque diagramme on associe une classe d'isotopie de nœud dans  $\mathbb{R}^3$  : on considère d'abord la courbe immergée dans  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ , puis on *résout les points doubles* en déplaçant le point de l'arc de dessous au niveau  $z = -\epsilon < 0$ , et les points voisins à des niveaux intermédiaires.

Ce qui précède s'étend naturellement aux entrelacs.

**Théorème 1.1.12** (Reidemeister). *Deux diagrammes définissent des nœuds (resp. des entrelacs), isotopes si et seulement s'ils se correspondent par un suite d'isotopies planes et de mouvements de Reidemeister décrit dans la figure 1.1.*

*Remarque 1.1.13.* Dans le cas orienté il y a lieu de considérer chaque mouvement de Reidemeister avec les différentes orientations.

Ce théorème permet de définir des invariants d'isotopie à partir de fonctions sur les diagrammes. Un premier exemple est l'enlacement de deux composantes orientées  $K$  et  $K'$ . A chaque croisement d'un diagramme on attribue un signe  $\pm 1$  selon la règle indiquée sur la figure 1.2.

**Proposition 1.1.14.** *Soit  $(K, K')$  un entrelacs orienté à deux composantes, représenté par un diagramme  $(D, D')$ , alors la demi-somme des signes des croisements (mixtes) entre  $D$  et  $D'$  est un entier invariant par mouvement de Reidemeister, et donc ne dépend que de la classe d'isotopie orientée de  $(K, K')$ .*

**Définition 1.1.15.** On appelle enlacement de  $K$  et  $K'$  l'invariant de la proposition précédente.

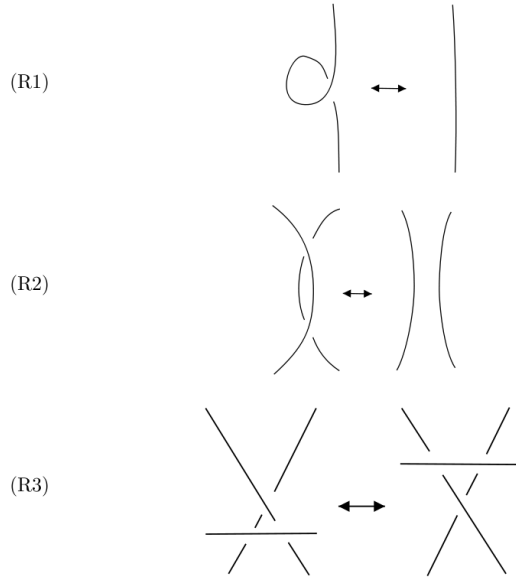


FIG. 1.1 – Mouvements de Reidemeister

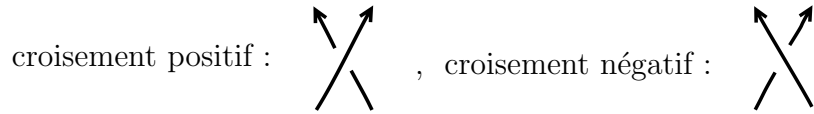


FIG. 1.2 – Signe d'un croisement

## 1.2 Le groupe du nœud

On identifie la sphère  $S^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  au compactifié d'Alexandroff de  $\mathbb{R}^3$  via la projection stéréographique de pôle  $(0, i)$ , et on considérera désormais les nœuds dans  $S^3$ .

**Proposition 1.2.1.** *a) Tout nœud dans  $S^3 \approx \hat{\mathbb{R}}^3$  est isotope à un nœud dans  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Deux nœuds dans  $\mathbb{R}^3$  sont isotopes dans  $\mathbb{R}^3$  si et seulement s'il le sont dans  $\hat{\mathbb{R}}^3 \cong S^3$ .*

Pour un nœud  $K$  dans  $S^3 \approx \hat{\mathbb{R}}^3 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ , on note :  $X_K = S^3 \setminus K$ .

**Définition 1.2.2.** Le groupe du nœud est le groupe fondamental du complément du nœud  $X_K$ .

On supposera généralement que  $K$  évite le point  $\infty$ , qu'on prendra comme point de base. Le groupe fondamental du nœud ne dépend pas de l'orientation, mais l'orientation est utile pour préciser des générateurs.

Etant donné un diagramme orienté, on associe à chaque arc un élément du groupe fondamental représenté par un méridien qui enlace positivement, relié au point de base par un chemin vertical dans le demi-espace positif.

**Théorème 1.2.3** (Présentation de Wirtinger). *Le groupe fondamental d'un nœud (ou un entrelacs) associé à un diagramme  $D$  à  $m$  croisements et  $m$  arcs (on a enlevé les petits segments qui passe dessous) admet une présentation avec comme générateurs un lacet méridien pour chaque arc, et une relation pour chaque croisement, de la forme  $ab = ca$  ( $c$  est le lacet correspondant à l'arc supérieur).*

La preuve repose sur le théorème de Van Kampen ; le cas particulier ci-dessous est suffisant. Pour la preuve d'un énoncé général, on pourra consulter *Topology and geometry*, Glen E. Bredon, chapitre III.

**Théorème 1.2.4.** *Soit  $X = U_1 \cup U_2$  un recouvrement ouvert de l'espace topologique  $X$ , avec  $U_1$ ,  $U_2$  et  $U_1 \cap U_2$  connexes par arcs,  $x_0 \in U_1 \cap U_2$ . On note les inclusions :  $i : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1$ ,  $j : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_2$ .*

*Si  $U_2$  est simplement connexe, alors l'application*

$$j_{\#} : \pi_1(U_1 \cap U_2, x_0) \rightarrow \pi_1(U_2, x_0)$$

*induit un isomorphisme :*

$$\frac{\pi_1(U_1, x_0)}{i_{\#}(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0))} \cong \pi_1(U_2, x_0)$$

*Exercice 1.2.5.* Donner une présentation du nœud de trèfle (nœud torique  $K_{3,2}$ ) et montrer qu'il existe un morphisme surjectif du groupe fondamental sur le groupe symétrique  $S_3$ .

*Exercice 1.2.6.* Montrer que le nœud carré et le nœud de mémé ont des groupes isomorphes.

*Exercice 1.2.7.* Montrer que les deux nœuds représentés dans la figure 1.3 (nœud carré et nœud de mémé) ont des groupes fondamentaux isomorphes.



FIG. 1.3 – Nœud carré et nœud de mémé

*Exercice 1.2.8.* Donner une présentation du groupe du nœud associé à un diagramme, avec un générateur pour chaque face bornée représenté par un lacet vertical (générateurs de Dehn).

## 1.3 Le module d'Alexander

*Exercice 1.3.1.* Calculer  $H_*(X_K)$  pour un nœud  $K$ , et plus généralement  $H_*(X_L)$  pour un entrelacs  $L$  à  $n$  composantes.

**Définition 1.3.2.** On appelle revêtement cyclique infini du nœud  $K$  le revêtement régulier  $\tilde{X}_K$  du complément du nœud  $K$ , associé au morphisme d'abélianisation :

$$h : \pi_1(X_K, \infty) \rightarrow H_1(X_K, \mathbb{Z}) .$$

Notons  $\Omega(X_K, \infty, x)$  l'espace des chemins de  $\infty$  à  $x$  dans  $X_K$ . On peut définir  $\tilde{X}_K$  comme le quotient de

$$\{(x, \gamma), x \in X_K, \gamma \in \Omega(X_K, \infty, x)\}$$

par la relation :

$$(x, \gamma) \sim (x', \gamma') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } h(\gamma'\gamma^{-1}) = 0.$$

*Exercice 1.3.3.* Montrer que la définition précédente construit un revêtement régulier de groupe  $H_1(X_K, \mathbb{Z})$ .

Une orientation du nœud  $K$  permet de choisir un générateur de  $H_1(X_K, \mathbb{Z})$ , représenté par un méridien qui enlace  $K$  positivement. On identifie alors  $H_1(X_K, \mathbb{Z})$  avec le groupe multiplicatif  $G = \{t^n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Le groupe  $G$  agit sur le revêtement  $\tilde{X}_K$ . Cette action s'étend en une action de l'anneau  $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  sur le complexe singulier  $C_*(\tilde{X}_K)$ , et cette action commute avec le bord. L'homologie  $H_*(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$  est donc un module sur  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ .

**Définition 1.3.4.** On appelle module d'Alexander du nœud  $K$  le  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  module  $H_1(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$ .

Le produit tensoriel  $H_1(\tilde{X}_K, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]} \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$  est un module de type fini (on va en donner une présentation) sur l'anneau principal  $\mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ . Le théorème de structure des modules de type fini sur les anneaux principaux nous donne des *facteurs invariants* qui sont des invariants du nœud.

**Définition 1.3.5.** Le polynôme d'Alexander du nœud  $K$  est le produit des facteurs invariants du module  $H_1(\tilde{X}_K, \mathbb{Z}) \otimes_{\mathbb{Z}[t, t^{-1}]} \mathbb{Q}[t, t^{-1}]$ . Il est défini modulo  $\pm t^{\pm k}$ .

*Remarque 1.3.6.* Le groupe  $H_1(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$  ne dépend pas de l'orientation de  $K$ . La structure de module sur  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  en dépend. Le changement d'orientation échange  $t$  et  $t^{-1}$ .

Etant donné un diagramme  $D$  d'un nœud orienté  $K$ , on associe à chaque face  $F$  du diagramme un lacet  $\gamma_F$ , pointé en  $\infty$ , dont l'image orientée est une droite verticale qui intersecte  $F$  positivement.

*Exercice 1.3.7.* Donner une présentation du groupe du nœud avec les générateurs  $[\gamma_F]$  (générateurs de Dehn).

On choisit un relevé  $\tilde{\infty}$  du point de base dans  $\tilde{X}_K$ . Chaque lacet  $[\gamma_F]$  se relève en un chemin d'origine  $\tilde{\infty}$ , noté  $\tilde{\gamma}_F$ . L'extrémité de ce chemin est un point :  $t^{I(F)}\tilde{\infty}$ .

**Proposition 1.3.8.** *Pour chaque face  $F$ ,  $I(F)$  est l'enlacement de  $\gamma_F$  avec  $K$ .*

Si on fixe une face  $F_e$ , avec  $I_{F_e} = \pm 1$  (on peut prendre une face adjacente à la face non bornée), alors pour chaque face  $F$ , on obtient un cycle  $c_F = \tilde{\gamma}_F - \frac{t^{I(F)}-1}{t^{I_{F_e}}-1}\tilde{\gamma}_{F_e}$ , dont la classe est simplement notée  $F$

**Théorème 1.3.9.** *On obtient une présentation de  $H_1(F, \mathbb{Z})$  comme  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  module, avec comme générateurs les faces bornées  $F$ ,  $F \neq F_e$  et pour chaque croisement décrit dans la figure 1.4 une relation :  $tA - B + C - tD = 0$ .*

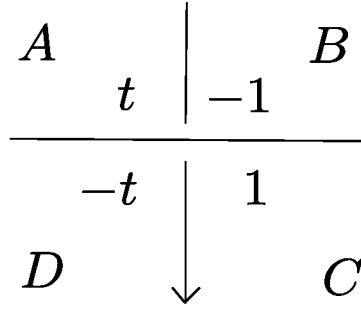


FIG. 1.4 – Relation d'Alexander

## 1.4 Polynôme d'Alexander

Le polynôme d'Alexander a été défini dans le paragraphe précédent. Il est égal modulo  $\pm t^{\pm k}$  au déterminant de la matrice de présentation du théorème 1.3.9. Ce qui nous donne une construction combinatoire qui suit l'article original d'Alexander. Elle vaut aussi pour les entrelacs.

Etant donné un diagramme orienté  $D$  connexe à  $m$  croisements, on appelle matrice d'Alexander la matrice à  $m$  lignes indexées par les croisements et  $m+2$  colonnes indexées par les faces (y compris la face non bornée). Les coefficients de la ligne associée à un croisement décrit dans la figure 1.4 sont ceux de l'équation correspondante  $tA - B + C - tD = 0$ . Pour chaque face  $F$ , l'indice est l'enlacement  $lk(\gamma_F, K)$  défini précédemment ( $K$  peut avoir plusieurs composantes).

**Proposition 1.4.1.** *Le déterminant  $\Delta_{p,q}$  de la sous-matrice carrée obtenue en éliminant deux faces adjacentes ne dépend pas modulo  $\pm t^{\pm k}$  du choix de ces deux faces.*

**Proposition 1.4.2.** *Le déterminant précédent est invariant, modulo  $\pm t^{\pm k}$ , par les trois mouvements de Reidemeister.*

*Remarque 1.4.3.* Dans le cas d'un entrelacs, on étend la définition à un diagramme non connexe en lui attribuant la valeur 0. Notons qu'un mouvement R2 peut passer d'un diagramme connexe à un diagramme non connexe.

**Définition 1.4.4** (Polynôme d'Alexander). On appelle polynôme d'Alexander le déterminant précédent ; on le note  $\Delta(K)$ .

*Exercice 1.4.5* (Polynôme d'Alexander-Conway ; voir *Formal Knot Theory*, Louis Kauffman.) ).

On remplace la relation d'Alexander par celle obtenue avec les *poids de Conway* indiqués dans la figure 1.5.

Montrer qu'en modifiant le déterminant par le signe donné par la signature de la permutation ligne-colonnes, qui à un croisement associe la région située entre les deux arêtes entrantes, on obtient un invariant d'entrelacs orientés  $\nabla(L)$ . (Pour un diagramme non connexe, la valeur est zéro.)

2. Montrer que si  $L_+$ ,  $L_-$  et  $L_0$  sont trois entrelacs qui ont des diagrammes identiques sauf en un petit disque où  $L_+$  a un croisement positif,  $L_-$  a un croisement négatif, et  $L_0$  n'a pas de croisement, alors :

$$\nabla(L_+) - \nabla(L_-) = (x - x^{-1})\nabla(L_0) .$$

3. Montrer que  $\nabla(L)$  est un polynôme en  $z = x - x^{-1}$ .
4. Montrer que  $\nabla(L)(x^{-1}) = \pm \nabla(L)(x)$  ; préciser le signe suivant le nombre de composantes de  $L$ .
5. Déterminer  $\nabla(L)_{x=1}$  suivant que  $L$  est un noeud ou a plusieurs composantes.
6. Quelle relation y a-t-il entre  $\nabla(L)$  et le polynôme d'Alexander ?

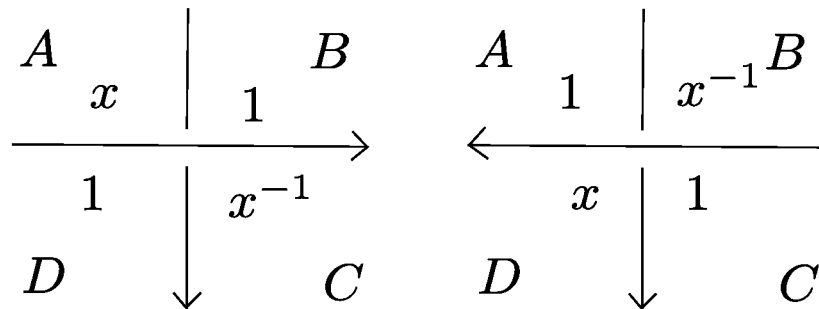


FIG. 1.5 – Poids de Conway

## 1.5 Crochet de Kauffman et polynôme de Jones

Pour un diagramme non orienté  $D$ , le crochet de Kauffman de  $D$  est le polynôme de Laurent défini par la formule qui suit. La somme est indexée par les applications  $s$  de l'ensemble des croisements dans  $\{-1, 1\}$ , qu'on appelle *états* du diagramme. A chaque état  $s$  correspond une courbe plongée  $D_s$  définie localement dans la figure 1.6. On note  $\sharp D_s$  le nombre de composantes de la courbe ; on pose  $\delta = -A^2 - A^{-2}$ , et  $s(D) = \sum_c s(c)$ .

$$\langle D \rangle = \sum_s A^{s(D)} \delta^{\sharp D_s} .$$



FIG. 1.6 – Crochet de Kauffman : résolution des croisements

*Exemples 1.5.1.* Pour le diagramme trivial on obtient  $\delta$ , pour le diagramme du nœud de trèfle positif représenté dans la figure 1.7 on obtient  $(-A^{-3} - A^{-7} - A^5)\delta$ .

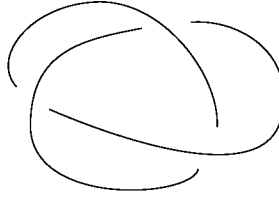


FIG. 1.7 – Nœud de trèfle positif

**Relations locales :** On écrira des relations entre les valeurs du crochet de Kauffman pour des diagrammes qui sont identiques en dehors d'un petit disque où on représente la modification. Le crochet de Kauffman vérifie par exemple les relations décrites dans la figure 1.8. De plus ces relations déterminent le crochet de Kauffman, si on normalise avec la valeur 1 pour l'entrelacs vide.

**Théorème 1.5.2.** *a) Le crochet de Kauffman est invariant par les mouvements de Reidemeister  $R2$  et  $R3$ .*

*b) Le mouvement  $R1$  multiplie le crochet de Kauffman par  $-A^{\pm 3}$  (figure 1.9).*

Pour un diagramme orienté  $D$  on note  $w(D)$  la somme des signes des croisements (on peut l'appeler le *writhe*, *writhe* en anglais). On obtient un invariant d'entrelacs orienté en corrigeant le crochet de Kauffman avec  $w(\vec{D})$ .

$$\begin{aligned}\langle \diagdown \diagup \rangle &= A \langle \rangle \langle \rangle + A^{-1} \langle \frown \smile \rangle \\ \langle \bigcirc \rangle &= \langle \quad \rangle \delta\end{aligned}$$

FIG. 1.8 – Relations de Kauffman

$$\langle \bigcirc \rangle = -A^3 \langle \quad \rangle \quad \langle \bigcirc \rangle = -A^{-3} \langle \quad \rangle$$

FIG. 1.9 – Crochet de Kauffman : Reidemeister 1

**Théorème 1.5.3.** *a) L'expression  $(-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$  est invariante par mouvement de Reidemeister et définit un invariant d'entrelacs orienté qui en posant  $q = -A^2$  appartient à  $\mathbb{Z}[q \pm 1]$ . On le note  $P_2(L)$ . b) L'invariant  $P_2(L)$  est déterminé par la relation de Jones 1.10 et la normalisation  $P_2(U) = q + q^{-1}$  pour le noeud trivial  $U$ .*

$$q^2 P_2 \left( \begin{array}{c} \nearrow \searrow \\ \nwarrow \nearrow \end{array} \right) - q^{-2} P_2 \left( \begin{array}{c} \nwarrow \nearrow \\ \nearrow \searrow \end{array} \right) = (q - q^{-1}) P_2 \left( \begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \end{array} \right) \left( \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array} \right)$$

FIG. 1.10 – Relation de Jones

*Remarque 1.5.4.* Le polynôme de Jones original  $V(L)$  est obtenu avec le changement de variable  $q = t^{-\frac{1}{2}}$  et la normalisation  $V(U) = 1 : V(L) = \left( \frac{P_2(L)}{q + q^{-1}} \right)_{q=t^{-\frac{1}{2}}}$ .

*Remarque 1.5.5.* L'invariant  $P_2$  peut être obtenu avec la théorie de représentation du groupe quantique  $U_q sl(2)$ . Il existe une série  $P_N$ ,  $N \geq 2$ , qui peut (entre autres) être obtenue avec la théorie de représentation du groupe quantique  $U_q sl(N)$ , et qui est déterminée par la normalisation  $P_N(U) = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}$  et la relation de Jones généralisée :

$$q^N P_N(L_+) - q^{-N} P_N(L_-) = (q_q^{-1}) P_N(L_0) .$$

En remplaçant  $q^N$  par une nouvelle indéterminée  $\alpha$ , on obtient le polynôme de Homfly. En spécialisant  $\alpha$  à 1, on retrouve (à normalisation près) le polynôme d'Alexander-Conway.

*Exercice 1.5.6.* Montrer que le polynôme  $P_2$  distingue les nœuds de trèfle droit et gauche.

*Exercice 1.5.7.* Calculer  $P_2$  pour le nœud de huit (figure 1.11) et son miroir. Est-ce que le nœud de huit est isotope à son miroir ?

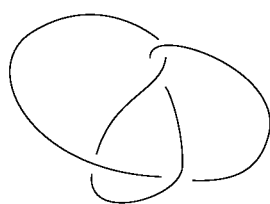


FIG. 1.11 – Nœud de huit