Chapitre 2

TQFT et algèbres de Frobenius

2.1 Cobordismes

On va considérer des variétés compactes orientées.

Définition 2.1.1. Un cobordisme topologique est une variété W de dimension $n+1$ dont le bord est décomposé comme union disjointe orientée : $\partial W = -\partial_- W \amalg \partial_+ W$. On note $(W, \partial_- W, \partial_+ W)$; on dit que W est un cobordisme de $\partial_- W$ à $\partial_+ W$).

Pour $n \geq 1$, il est équivalent de demander l'existence d'un atlas orienté avec des cartes modelées sur $[0,1] \times \mathbb{R}^n$. Les points de $\partial_+ W$ (resp. $\partial_- W$) sont ceux qui par une carte (donc toutes) correspondent à des points de $1 \times \mathbb{R}^n$ (resp. $0 \times \mathbb{R}^n$).

Définition 2.1.2. Un cobordisme lisse est une variété lisse W de dimension $n+1$ dont le bord est décomposé comme union disjointe orientée : $\partial W = -\partial_- W \amalg \partial_+ W$. On a de plus fixé des identifications orientées du stabilisé des espaces tangents aux composantes du bord :

$$\theta \oplus T\partial_\epsilon W \approx TW_{|\partial_\epsilon W} \ ,$$

repectivement entrantes et sortantes pour $\partial_- W$ et $\partial_+ W$.

Pour $n \geq 1$, il est équivalent de demander l'existence d'un atlas orienté avec des cartes modelées sur $[0,1] \times \mathbb{R}^n$ qui respectent le vecteur tangent $(1,0) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ aux points du bord.

Exemple 2.1.3. Le disque avec 2 trous : $D^2 - (B(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}) \cup B(\frac{-1}{2}, \frac{1}{4})$ est un cobordisme des deux cercles intérieurs vers le cercle extérieur (*pantalon*).

Exemple 2.1.4. Si M est une variété compacte orientée, $([0,1] \times M, \{0\} \times M, \{1\} \times M)$ est un cobordisme ; $([0,1] \times M, \emptyset, -\{0\} \times M \cup \{1\} \times M)$ et $([0,1] \times M, -\{1\} \times M \cup \{0\} \times M, \emptyset)$ sont également des cobordismes.

Exemple 2.1.5. Si $f : M \to M'$ est un difféomorphisme, alors le cylindre de f, C_f est un cobordisme de $\{0\} \times M \cong M$ à M'.

$$C_f = \frac{[0,1] \times M \ \amalg \ M'}{(1,x) \sim f(x)} \ .$$

Etant donné deux cobordismes (W, M, M') et (W', M', M''), on obtient un cobordisme recollé : $(W \cup W', M, M'')$.

Etant donné un cobordisme $(W, \partial_- W, \partial_+ W)$ et des difféomorphismes $\phi : M \to \partial_- W$, $\phi' : M' \to \partial_+ W$, le cobordisme $(C_f \cup W \cup C_{f'}, M, M')$ est noté $(W, (M, \phi), (M', \phi'))$ ou simplement (W, M, M').

Groupes de cobordisme.

L'existence d'un cobordisme entre deux variétés de dimension n est une relation d'équivalence. On note Ω_n l'ensemble des classes d'équivalence (classes de cobordisme).

Proposition 2.1.6. *L'union disjointe induit sur Ω_n une structure de groupe commutatif.*

Une construction due à Thom ramène le calcul des groupes de cobordisme à une théorie cohomologique. Les premiers résultats sont élémentaires : $\Omega_0 = \mathbb{Z}$, $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$. On obtient ensuite $\Omega_3 = 0$, $\Omega_4 = \mathbb{Z}$ (engendré par $\mathbb{C}P^2$).

Catégorie de cobordisme.

Pour obtenir une catégorie dont les objets sont les variétés orientées de dimension n, il convient de mettre une relation d'équivalence sur les cobordismes :

Définition 2.1.7. Deux cobordismes (W, M, M') et (W', M, M') sont équivalents si et seulement s'il existe un difféomorphisme $\phi : W \to W'$ tel que $(d\phi)_{|\partial W}$ est l'identité.

Proposition 2.1.8. *Le recollement des cobordismes définit une catégorie notée $n - Cob$ dont les objets sont les variétés orientées compactes de dimension n, et dont les morphismes sont les classes d'équivalence de cobordismes de dimension $n + 1$.*

Cette catégorie est munie d'une structure additionnelle donnée par l'union disjointe (une structure *monoïdale*), avec dualité donnée par la variété opposée. Le propos des TQFTs est d'en étudier les représentations algébriques.

2.2 TQFT : axiomatique

En bref : une TQFT $\mathbf{V}$ en dimension $n + 1$, sur l'anneau de base $\mathbf{k}$ (commutatif intègre) est un foncteur de la catégorie $n - Cob$ vers la catégorie des $\mathbf{k}$-modules qui est monoïdal et symétrique. Ce qui suit donne une définition complète.

Une TQFT $\mathbf{V}$ sur l'anneau de base $\mathbf{k}$ en dimension $n + 1$:

associe à chaque variété M de dimension n (orientée compacte sans bord) un $\mathbf{k}$-module $\mathbf{V}(M)$

associe à chaque cobordisme de dimension $n+1$, $W = (W, M, M')$, une application linéaire :

$$\mathbf{V}(W) : \mathbf{V}(M) \to \mathbf{V}(M') .$$

On demande les axiomes suivants :

1. (Naturalité) Un difféomorphisme de dimension n, $g : M \to N$, induit un isomorphisme $g_\sharp : \mathbf{V}(M) \to \mathbf{V}(N)$, et ces isomorphismes sont compatibles avec les applications linéaires associées aux cobordismes.
2. (Fonctorialité) L'application linéaire associée au recollement de deux cobordismes (W, M, M') et (W', M', M'') est la composée $\mathbf{V}(W') \circ \mathbf{V}(W)$.
3. (Normalisation) Un cobordisme produit agit par l'identité :

$$\mathbf{V}([0,1] \times M) = Id_{\mathbf{V}(M)} .$$

4. (Multiplicativité) Il existe des isomorphismes fonctoriels :

$$\mathbf{V}(M \amalg M') \approx \mathbf{V}(M) \otimes \mathbf{V}(M') \quad , \quad \mathbf{V}(\emptyset) \approx \mathbf{k} ,$$

compatibles avec les difféomorphismes

$$\mathbf{V}(M \amalg (M' \amalg M'')) \approx \mathbf{V}((M \amalg M') \amalg M'')) \quad , \quad \mathbf{V}(M \amalg \emptyset) \approx \mathbf{V}(M) .$$

5. (Symétrie) L'isomorphisme $\mathbf{V}(M \amalg M') \approx \mathbf{V}(M' \amalg M)$ est compatible avec l'isomorphisme $\mathbf{V}(M) \otimes \mathbf{V}(M') \approx \mathbf{V}(M') \otimes \mathbf{V}(M)$.

Remarque 2.2.1. Il est possible d'étendre la définition à des catégories où les cobordismes sont munis de structures additionnelles, ou sont plus généraux que les variétés.

Proposition 2.2.2. *Le cobordisme* $([0,1] \times M, -M \amalg M, \emptyset)$ *définit une forme bilinéaire non singulière :*

$$\mathbf{V}(-M) \otimes \mathbf{V}(M) \to \mathbf{k} .$$

(c'est à dire induit un isomorphisme $\mathbf{V}(-M) \approx \mathbf{V}(M)^*$*.*

Corollaire 2.2.3. *Si* $\mathbf{k}$ *est un corps (resp. un anneau principal), alors* $\mathbf{V}(M)$ *est un espace vectoriel de dimension finie (resp. un module libre de type fini).*

2.3 Algèbres de Frobenius

Soit $\mathbf{V}$ une TQFT en dimension $1+1$, sur l'anneau de base $\mathbf{k}$. Notons $\mathbf{V}(S^1) = A$.

Proposition 2.3.1. *a) Le pantalon définit sur A un produit pour lequel A est une algèbre commutative d'élément neutre $\mathbf{V}(D^2, \emptyset, S^1)$.*
b) Notons ϵ_A la forme linéaire $\mathbf{V}(-D^2, S^1, \emptyset)$. L'application $(x, y) \mapsto \epsilon_A(x, y)$ définit sur $A^{\otimes 2}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Définition 2.3.2. On appelle algèbre de Frobenius toute $\mathbf{k}$-algèbre A munie d'une forme linéaire ϵ_A telle que l'application $(x, y) \mapsto \epsilon_A(x, y)$ définit sur $A^{\otimes 2}$ une forme bilinéaire symétrique non dégénérée.

Exercice 2.3.3. Montrer que si $\mathbf{k}$ est un corps (resp. un anneau principal) alors la définition précédente entraîne que A est de dimension finie (resp. libre de dimension finie).

Sur un corps (ou sur un anneau principal), $A = \mathbf{V}(S^1)$ est une algèbre de Frobenius commutative. Réciproquement, une algèbre de Frobenius commutative détermine la TQFT :

Théorème 2.3.4. *Soit $(A, \mu_A : A^{\otimes 2} \to A, \epsilon_A : A \to \mathbf{k})$ une algèbre de Frobenius commutative sur le corps (resp. sur l'anneau principal) $\mathbf{k}$, alors il existe un foncteur TQFT sur la catégorie 2-Cob, tel que : $\mathbf{V}_A(S^1) = A$, $\mathbf{V}_A(P, S^1 \amalg S^1, S^1) = \mu_A$ et $\mathbf{V}_A(-D^2, S^1, \emptyset) = \epsilon_A$.*

Remarque 2.3.5. Le foncteur $\mathbf{V}$ s'étend aux surfaces avec un nombre fini de points, à chacun desquels on a associé un élément de A.

2.4 La construction universelle

Une TQFT sur $\mathbf{k}$ en dimension $n+1$ associe à chaque variété sans bord de dimension n un élément de $\mathrm{Hom}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) \simeq \mathbf{k}$. La construction universelle cherche à étendre un invariant $M \mapsto I(M) \in \mathbf{k}$ des variétés de dimension n en une TQFT en dimension $n+1$. Pour reconstruire ainsi une TQFT $\mathbf{V}$, il faut et il suffit que les vecteurs $\mathbf{V}(W)$, $\partial W = M$ engendrent $\mathbf{V}(M)$; on dit alors que la TQFT est engendrée par les bordismes. En dimension 1+1, on obtient une théorie engendrée par les bordismes, si on étend la TQFT aux cobordismes qui sont des surfaces Σ, avec un nombre fini de points respectivement marqués par des éléments de $A = \mathbf{V}(S^1)$ (voir l'exercice 2.4.6).

2.4.1 Exemple

On considère l'invariant I des surfaces orientées compactes avec un nombre fini de points défini par (g est le genre)

$$I((\Sigma_g, \{x_1, \dots, x_k\}) = \begin{cases} 2 & \text{si } g = 1,\ k = 0 \\ 1 & \text{si } g = 0,\ k = 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Proposition 2.4.1. *Il existe une TQFT sur l'anneau $\mathbb{Z}$ qui étend l'invariant I.*

Démonstration. Pour une courbe Γ, on définit $\mathcal{V}(\Gamma)$ comme le groupe abélien libre de base les surfaces avec points de bord Γ (i.e. les cobordismes de $\emptyset$ vers Γ).

$\mathbf{V}(\Gamma)$ est le quotient de $\mathcal{V}(\Gamma)$ par le sous-module :

$$\mathcal{V}_O(\Gamma) = \{\sum_i \lambda_i \Sigma_i,\ \text{pour tout cobordisme } N = (N, \Gamma, \emptyset),\ \sum_i I(\Sigma_i \cup_\Gamma N) = 0\}\ .$$

A un cobordisme on associe l'application définie par le recollement. Cette application passe au quotient, et on obtient ainsi un foncteur sur la catégorie de cobordisme des surfaces avec points que nous notons $2 - \mathrm{Cob}^\bullet$. Nous allons montrer que ce foncteur est multiplicatif.

Lemme 2.4.2.

$$\mathbf{V}([0,1] \times D^2, \emptyset, -S^1 \amalg S^1) = \mathbf{V}(-D^2 \amalg (D^2, 0)) + \mathbf{V}(-(D^2, 0) \amalg D^2)$$

Corollaire 2.4.3. $\mathbf{V}(\Gamma)$ *est engendré par les unions disjointes de disques ou de disques avec un point.*

On montre que $A = \mathbf{V}(S^1)$ est libre de rang 2, de base D^2 et $(D^2, 0)$, puis que $\mathbf{V}(\amalg_k S^1) \simeq A^{\otimes k}$. □

Exercice 2.4.4. Montrer que l'algèbre A ci-dessus est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/X^2$.

Exercice 2.4.5. Construire une TQFT pour laquelle $\mathbf{V}(S^1)$ est l'algèbre de Frobenius $A' = \mathbb{Z}[X]/(X^2 - 1)$, $\epsilon_{A'}(1) = 0$, $\epsilon_{A'}(X) = 1$. (On pourra commencer par calculer l'invariant des surfaces sans bord pour une telle TQFT, si elle existe.)

Exercice 2.4.6. On suppose que $\mathbf{k}$ est un corps ou un anneau principal. Soit V une TQFT en dimension $1+1$ sur $\mathbf{k}$ et $A = \mathbf{V}(S^1)$ son algèbre de Frobenius. Utiliser la construction universelle pour étendre $\mathbf{V}$ en une TQFT pour les surfaces avec un nombre fini de *points coloriés* par des éléments de A. L'invariant des surfaces sans bord avec points est défini par :

$$I(\Sigma, (x_1, a_1), \dots, (x_k, a_k)) = < \mathbf{V}(\Sigma - (d_1 \cup \dots \cup d_k)), a_1 \otimes \dots \otimes a_k > ,$$

où les d_i sont des disques ouverts voisinages des x_i, d'adhérences disjointes.

2.4.2 TQFT associée à une algèbre de Frobenius commutative

La construction universelle appliquée à une algèbre de Frobenius commutative A sur un corps ou un anneau principal $\mathbf{k}$ donne une démonstration du théorème 2.3.4 :

Démonstration. Soit (A, μ_A, ϵ_A) l'algèbre de Frobenius sur l'anneau intègre $\mathbf{k}$. Alors $(A \otimes A, \mu_A \otimes \mu_A, \epsilon_A \otimes \epsilon_A$ est aussi une algèbre de Frobenius commutative La transposée de μ_A est une application :

$$^t\mu_A : A^* \to (A \otimes A)^*$$

Avec les isomorphismes $A^* \simeq A$ et $(A \otimes A)^* \simeq A \otimes A$ induits respectivement par ϵ_A et $\epsilon_A \otimes \epsilon_A$, on obtient une application $\Delta_A : A \to A \otimes A$.

Exercice 2.4.7. a) Montrer que le coproduit Δ_A est co-associatif et que ϵ_A est co-unité.
b) Démontrer que Δ_A est A-linéaire à gauche (resp. à droite), si A agit sur $A \otimes A$ par multiplication sur le facteur de gauche (resp. de droite).
c) Montrer sur l'exemple traité précédemment que Δ_A n'est pas un morphisme d'algèbre (et donc qu'on n'a pas de structure d'algèbre de Hopf).

A une surface de genre g avec points coloriés : $(\Sigma, (x_1, a_1), \dots (x_m, a_m))$ on associe :

$$I((\Sigma, (x_1, a_1), \dots (x_m, a_m)) = \epsilon_A \circ (\mu_A \circ \Delta)^g(a) \text{ ,où } a \text{ est le produit des } a_i.$$

Pour une courbe Γ, on définit $\mathcal{V}(\Gamma)$ comme le groupe abélien libre de base les surfaces avec points coloriés par des éléments de A et de bord Γ (i.e. les cobordismes de $\emptyset$ vers Γ la catégorie de cobordisme des surfaces avec points coloriés par A que nous notons $2 - \mathrm{Cob}^A$).

$\mathbf{V}(\Gamma)$ est le quotient de $\mathcal{V}(\Gamma)$ par le sous-module :

$$\mathcal{V}_O(\Gamma) = \{\sum_i \lambda_i \Sigma_i, \text{ pour tout cobordisme } N = (N, \Gamma, \emptyset), \sum_i I(\Sigma_i \cup_\Gamma N) = 0\} \ .$$

A un cobordisme on associe l'application définie par le recollement. Cette application passe au quotient, et on obtient ainsi un foncteur sur la catégorie de cobordisme des surfaces avec points $2 - \mathrm{Cob}^A$. Nous allons montrer que ce foncteur est multiplicatif.

Lemme 2.4.8. *Soit e_i, $1 \leq i \leq m$ une base de A (cf exercice 2.3.3). Il existe des éléments f_i , $1 \leq i \leq m$, dans A tels que :*

$$\mathbf{V}([0,1] \times D^2, \emptyset, -S^1 \amalg S^1) = \sum_i \mathbf{V}((-D^2, (0, f_i) \amalg (D^2, (0, e_i))$$

Corollaire 2.4.9. $\mathbf{V}(\Gamma)$ *est engendré par les unions disjointes de disques ou de disques avec un point colorié.*

On montre que $\mathbf{V}(S^1) \simeq A$, puis que $\mathbf{V}(\amalg_k S^1) \simeq A^{\otimes k}$. □