Chapitre 3

Homologie de Khovanov

3.1 TQFT orientable

Soit $\mathbf{V}$ une TQFT en dimension $1+1$, d'algèbre de Frobenius A. Le difféomorphisme $z \mapsto \overline{z}$ induit un isomorphisme $\mathbf{V}(-S^1) \simeq \mathbf{V}(S^1) = A$. Plus généralement, pour toute courbe orientée Γ, on a un isomorphisme $\mathbf{V}(-\Gamma) \simeq \mathbf{V}(\Gamma) = A^{\otimes \sharp \Gamma}$. De plus, si $(\Sigma, \Gamma, \Gamma')$ est un cobordisme orienté, alors $\mathbf{V}(-\Sigma)$ est compatible avec les isomorphismes précédents.

Proposition 3.1.1. $\mathbf{V}$ *induit un foncteur TQFT sur la catégorie des cobordismes orientables en dimension* $1+1$*, avec points coloriés par des éléments de* A*.*

Dans toute la suite de ce chapitre, on va considérer la TQFT associée à l'algèbre de Frobenius $A = \mathbb{Z}[X]/X^2$ sur la catégorie orientable en dimension $1+1$, avec des points implicitement coloriés par X.

TQFT graduée

A un cobordisme avec point : $C = ((\Sigma, x_1, \ldots, x_k), \Gamma, \Gamma')$ on associe l'entier $d(C) = \chi(\Sigma) - 2k$. On définit ainsi une graduation sur les modules $\mathbf{V}(\Gamma)$ obtenus par la construction universelle, et l' application induite par un cobordisme C est homogène de degré $d(C)$.

Etant donné un module libre gradué de dimension finie, $M = \oplus M_i$, la q-dimension de M est : $\mathrm{qdim}(M) = \sum_i q^i \dim(M_i)$. Le module noté $M\{k\}$ est égal à M comme module, avec une graduation décalée de sorte que : $\mathrm{qdim}(M\{k\}) = \mathrm{qdim}(M)\, q^k$. Il peut être utile de noter par $\mathcal{S}^k : M \to M\{k\}$ l'application égale à l'identité mais homogène de degré k.

3.2 Le complexe de Khovanov

Soit D un diagramme orienté. On considère :

$$K(D) = \bigoplus_s V(D_s)\{w(D) + s(D))\} \otimes \wedge^{d_s} \Delta_s = \sum_s K_s(D) \tag{3.1}$$

Ici : $w(D)$ est le vrillage, c'est à dire la somme des signes des croisements.
Un état s est une application de l'ensemble des croisements vers $\{-1, 0, 1\}$ qui à un croisement positif associe 0 ou 1, et à un croisement négatif associe -1 ou 0.
Δ_s est le groupe abélien libre de base les croisements c tels que $s(c) \neq 0$; d_s est la dimension de ce groupe.

On définit l'application $\partial : K(D) \to K(D)$ par bloc : la restriction

$$\partial_s^{s'} : K_s(D) \to K_{s'}(D)$$

est nulle, sauf si s et s' sont différents en exactement un croisement c, où $s'(c) = s(c)+1$. Dans ce cas, il existe un cobordisme Σ qui est un produit en dehors du voisinage du croisement c, où il y a une selle. Pour un croisement c positif :

$$\partial_s^{s'} = \mathbf{V}(\Sigma) \otimes (\bullet \wedge c) : \mathbf{V}(D_s) \otimes \wedge^{d_s} \Delta_s \to \mathbf{V}(D_{s'}) \otimes \wedge^{d_{s'}} \Delta_{s'}$$

Pour un croisement c négatif,

$$\partial_s^{s'} = \mathbf{V}(\Sigma') \otimes < \bullet, c >: \mathbf{V}(D_s) \otimes \wedge^{d_s} \Delta_s \to \mathbf{V}(D_{s'}) \otimes \wedge^{d_{s'}} \Delta_{s'}$$

La contraction $< \bullet, c >$ est définie par $< v \wedge c, c >= v$. On obtient un complexe dont le degré (co-)homologique est $s(D)$.

Théorème 3.2.1. *a)* $(K(D), \partial)$ *est un complexe gradué.*
b) Pour chaque mouvement de Reidemeister $D \leftrightarrow D'$ *, il existe une équivalence d'homotopie graduée* $K(D) \to K(D')$.
c) La caractéristique d'Euler graduée de $K(D)$ *est égale à* $P_2(D)(q^{-1})$.