Chapitre 1

Intégration

1.1 Primitives

On s'intéresse au problème inverse de la dérivation qu'on peut formuler par l'équation :

$$y' = f(x) \ .$$

Cela signifie qu'étant donnée une fonction f de la variable x, généralement définie sur un intervalle, on s'intéresse aux fonctions $x \mapsto y(x)$ de dérivée égale à f.

Remarque 1.1.1. La variable peut être le temps (noté plutôt t que x). Le problème peut alors s'interpréter comme la recherche de l'équation d'un mouvement connaissant sa vitesse.

Définition 1.1.2. Une primitive sur un intervalle I d'une fonction f est une fonction F dérivable sur I, de dérivée f :

$$\forall x \in I \ F'(x) = f(x) \ .$$

On obtient une nouvelle primitive en ajoutant une constante. C'est la seule ambigüité dans le choix d'une primitive.

Proposition 1.1.3. *Si F est une primitive de f sur l'intervalle I, alors les primitives de f sur I sont les fonctions : $x \mapsto F(x) + C, \ C \in \mathbb{R}$.*
Pour $x_0 \in I$ et $y_0 \in \mathbb{R}$, il y a unicité de la primitive qui prend en x_0 la valeur y_0. (On dit que le choix est déterminé par la condition initiale.)

Lorsque F est une primitive de f, on écrit souvent :

$$\int f(x)dx = F(x) + C \ .$$

Contrairement à ce qu'on verra dans le prochain paragraphe, l'intégrale écrite ici n'a pas de bornes ; on l'appelle *intégrale indéfinie*. Noter l'emploi systématique de la constante.

1.2 Quelques primitives classiques

Fonction	Une primitive	Intervalle I
$x^n,\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{x}$	$\ln\lvert x\rvert$	$I \subset \mathbb{R}^*$
$x^n,\ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1}$	$I \subset \mathbb{R}^*$
$x^a,\ a \in \mathbb{R}$	$\frac{x^{a+1}}{a+1}$	$]0, +\infty[$
e^{ax}	$\frac{e^{ax}}{a}$	$\mathbb{R}$
$a^x = e^{x \ln a},\ a > 0$	$\frac{a^x}{\ln a}$	$\mathbb{R}$
$\cos(ax+b),\ a \neq 0$	$\frac{1}{a}\sin(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\sin(ax+b),\ a \neq 0$	$\frac{-1}{a}\cos(ax+b)$	$\mathbb{R}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x$	$\mathbb{R}$
$u^n u',\ n \in \mathbb{N}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	u dérivable sur I
$\frac{u'}{u}$	$\ln\lvert u\rvert$	u dérivable non nulle sur I
$u^n u',\ n \in \mathbb{Z} - \{-1\}$	$\frac{u^{n+1}}{n+1}$	u dérivable non nulle sur I

1.3 L'intégrale comme limite de sommes

Soit f une fonction bornée sur l'intervalle $[a,b]$. Pour $n \geq 1$, on subdivise l'intervalle $[a,b]$ en n intervalles de même diamètre ; on obtient la *subdivision* :

$$a_0 = a, a_1 = a + \frac{b-a}{n}, \ldots, a_k = a + k\frac{(b-a)}{n}, \ldots, a_n = a + n\frac{(b-a)}{n} = b\ .$$

On pose pour chaque k : $m_k = \inf_{a_{k-1} \leq t \leq a_k} f(t)$, et $M_k = \sup_{a_{k-1} \leq t \leq a_k} f(t)$, puis on forme les sommes (appelées sommes de Riemann) :

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} m_k\ , \quad \text{et} \quad , \ S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} M_k\ .$$

Définition 1.3.1. La fonction f est intégrable sur $[a,b]$ si et seulement si les suites $(s_n)_{n\geq 0}$ et $(S_n)_{n\geq 0}$ convergent vers la même limite. Cette limite est l'intégrale de f sur $[a,b]$: $\int_a^b f(t)dt$.

L'intégrale $\int_a^b f(t)dt$ est l'aire de la partie du plan comprise entre l'axe des abscisses et la courbe représentant f dans la bande $a \leq x \leq b$. Cette aire est comptée avec un signe positif ou négatif suivant sa position par rapport à l'axe des abscisses.

Théorème 1.3.2. *Si f est continue sur $[a, b]$ alors f est intégrable sur $[a, b]$.*

Le théorème qui suit permet de calculer les intégrales en utilisant les primitives connues.

Théorème 1.3.3 (Théorème fondamental de l'intégration)**.** *a) Si f est une fonction continue sur un intervalle I et $a \in I$, alors la fonction G définie par :*

$$G(x) = \int_a^x f(t)dt \ ,$$

est une primitive de f sur l'intervalle I (est dérivable de dérivée f).
b) Si f est continue sur $[a, b]$, alors pour toute primitive de f sur un intervalle qui contient a et b, on a :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \ .$$

fin du cours du 28/01/09

1.4 Calcul des intégrales

1.4.1 Intégration par parties

Pour l'intégrale indéfinie :

Théorème 1.4.1. *Si u et v ont des dérivées continues sur l'intervalle I, alors sur I :*

$$\int u(t)v'(t)dt = u(t)v(t) - \int u'(t)v(t)dt \ + C \ .$$

Ecriture brève : $\int udv = uv - \int vdu \ + C$.

Théorème 1.4.2. *Si u et v ont des dérivées continues sur $[a, b]$, alors :*

$$\int_a^b u(t)v'(t)dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)dt \ .$$

Exemples 1.4.3. a) $\int \ln x = x \ln x - x + C$.
b) $\int x^2 e^x dx = e^x(x^2 - 2x + 2) + C$.
c) $\int x^3 \sin x dx = -x^3 \cos x + 3x^2 \sin x + 6x \cos x - 6 \sin x + C$.
d) $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t dt$. Pour $n \geq 2$, $nI_n = (n-1)I_{n-2}$.

1.4.2 Changement de variable

L'idée du changement de variable dans une intégrale $\int f(x)dx$ est de remplacer x par $u(t)$ et dx par $u'(t)dt$.

Théorème 1.4.4. *Si u a une dérivée continue sur $[a, b]$ et si f est continue sur un intervalle qui contient $u([a, b])$, alors :*

$$\int_{u(a)}^{u(b)} f(x)dx = \int_a^b f(u(t))u'(t)dt \ .$$

Dans la plupart des cas le changement de variable $x = u(t)$ est bijectif : $x = u(t) \Leftrightarrow t = v(x)$. On a alors (si v est dérivable) $dt = v'(x)dx$.

Exemple 1.4.5. $\int_1^2 (3t+5)^5 dt = \int_8^{11} \frac{x^5 dx}{3} = \frac{167713}{2}$.

Exemple de calcul avec Sage :

```
t=var('t')
integrate((3*t+5)^5,t,1,2)
```

fin du cours du 04/02/09

Exemple 1.4.6. $\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^t - 1}dt = 2 - \frac{\pi}{2}$.

Exemple 1.4.7. Pour $a \neq 0$, $\int \frac{dt}{t^2+a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{t}{a} \ + C$.

1.5 Intégration des fractions rationnelles

On appelle fraction rationnelle tout quotient de deux polynômes. L'idée générale pour intégrer une fraction rationnelle est de factoriser le dénominateur, puis de décomposer en élément simples. Avant de formuler le résultat général, on va envisager des cas particuliers. Le dénominateur se décompose en facteurs de degré 1 ou de degré 2 (sans racine réelle). On dit qu'un facteur est simple s'il apparaît une seule fois (avec l'exposant 1).

Proposition 1.5.1. *Toute fraction rationnelle $\frac{P(x)}{Q(x)}$ s'écrit de manière unique sous la forme :*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = E(x) + \frac{R(x)}{Q(x)},$$

avec $\deg R < \deg Q$.

Remarque 1.5.2. On obtient $E(x)$ et $R(x)$ par division euclidienne.

$E(x)$ est la partie entière ; elle est facile à intégrer. Nous allons désormais essentiellement nous intéresser au cas $\frac{P(x)}{Q(x)}$ avec $\deg P < \deg Q$.

1.5.1 Cas de facteurs simples de degré 1

Proposition 1.5.3. *La fraction rationnelle* $\frac{P(x)}{Q(x)}$*, avec* $\deg P < \deg Q$ *et* $Q(x) = (x - a_1) \dots (x - a_n)$ *(facteurs distincts) se décompose sous la forme :*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_1}{x - a_1} + \dots + \frac{b_n}{x - a_n} \ .$$

Remarque 1.5.4. On obtient b_k en multipliant par $(x - a_k)$ puis en posant $x = a_k$.

Exemple 1.5.5. $\frac{x}{x^3+2x^2-x-2} = \frac{-2}{3(x+2)} + \frac{1}{2(x+1)} + \frac{1}{6(x-1)}$.

fin du cours du 05/02/09

1.5.2 Cas d'un seul facteur simple avec multiplicité

Proposition 1.5.6. *La fraction rationnelle* $\frac{P(x)}{(x-a)^n}$*, avec* $\deg P < n$ *se décompose sous la forme :*

$$\frac{P(x)}{(x-a)^n} = \frac{b_1}{x - a} + \frac{b_2}{(x-a)^2} \dots + \frac{b_n}{(x-a)^n} \ .$$

Remarque 1.5.7. On obtient les b_k en posant $X = x - a$.

Exemple 1.5.8. $\frac{x^3+1}{(x-2)^4} = \frac{1}{x-2} + \frac{6}{(x-2)^2} + \frac{12}{(x-2)^3} + \frac{9}{(x-2)^4}$.

1.5.3 Cas de facteurs simples de degré 2

Proposition 1.5.9. *La fraction rationnelle* $\frac{P(x)}{Q(x)}$*, avec* $\deg P < \deg Q$ *et* $Q(x) = Q_1 Q_2 \dots Q_n$ *(facteurs distincts de degré 2) se décompose sous la forme :*

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{b_1 x + c_1}{Q_1(x)} + \dots + \frac{b_n x + c_n}{Q_n} \ .$$

Remarque 1.5.10. On peut obtenir b_k en multipliant par Q_k puis en posant successivement : $x = a_k$, $x = \overline{a_k}$, où a_k, $\overline{a_k}$ sont les racines complexes conjuguées de Q_k. D'autres méthodes sont possibles : identification, évaluation en des valeurs particulières, limite à l'infini du produit avec x ...

Chaque polynôme Q_k se met sous la forme $\lambda((x-c)^2 + b^2)$. L'intégration se déduit de :

$$\int \frac{x - c}{(x-c)^2 + b^2} = \frac{1}{2} \ln((x-c)^2 + b^2) \ \ , \ \int \frac{1}{(x-c)^2 + b^2)} = \frac{1}{b} \arctan \frac{x - c}{b} \ .$$

Exemple 1.5.11. $\int \frac{1}{(x^2+1)(x^2+4)} dx = \frac{\arctan x}{3} - \frac{\arctan \frac{x}{2}}{6} + C$.

1.6 Cas général

On admet le résultat général suivant :

Théorème 1.6.1. *Si* $f(t) = \frac{P(t)}{Q(t)}$, *où* P *est un polynôme, et :*

$$Q(t) = \prod_i (t-a_i)^{\alpha_i} \prod_j ((t-c_j)^2 + b_j^2)^{\beta_j}$$

alors $f(t)$ *s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des éléments suivants :*

x^n, $0 \leq n \leq \deg(P) - \deg(Q)$,
$\frac{1}{(t-a_i)^{k_i}}$, $0 < k_i \leq \alpha_i$,
$\frac{t}{((t-c_j)^2+b_j^2)^{l_j}}$, $0 < l_j \leq \beta_j$,
$\frac{1}{((t-c_j)^2+b_j^2)^{l_j}}$, $0 < l_j \leq \beta_j$.

Remarque 1.6.2. Pour une fonction paire ou impaire l'écriture précédente ne fait apparaître que des éléments de même parité.

Remarque 1.6.3. L'intégrale de $\frac{1}{(x^2+1)^m}$, se déduit de celle de $\frac{1}{(x^2+1)^{m-1}}$, avec une intégration par partie :

$$\frac{1}{(x^2+1)^m} = \frac{2x}{(x^2+1)^{m+1}} \times \frac{x}{2} + \frac{1}{(x^2+1)^{m+1}}$$

$$\int \frac{2x}{(x^2+1)^{m+1}} \times \frac{x}{2} dx = -\frac{x}{2m} \frac{1}{(x^2+1)^m} + \int \frac{1}{2m} \frac{1}{(x^2+1)^m} dx \ + C$$

Exemple 1.6.4. $\frac{1}{x(x^2+1)^2} = \frac{-x}{x^2+1} - \frac{x}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x}$;
$\int \frac{1}{x(x^2+1)^2} dx = \frac{-\left(\log\left(x^2+1\right)\right)}{2} + \log(x) + \frac{1}{2x^2+2} \ + C.$
$\frac{1}{x^2(x^2+1)^2} = \frac{-1}{x^2+1} - \frac{1}{(x^2+1)^2} + \frac{1}{x^2}$;
$\int \frac{1}{x^2(x^2+1)^2} dx = \frac{-3\mathrm{Arctan}(x)}{2} - \frac{3x^2+2}{2x^3+2x} \ + C.$
$\frac{x^3-x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{x-1}{x^2+1} + \frac{1-x}{(x^2+1)^2}$;
$\int \frac{x^3-x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\log\left(x^2+1\right)}{2} - \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{2} + \frac{x+1}{2x^2+2} \ + C.$

fin du cours du 11/02/09

1.6.1 Division suivant les puissances croissantes

Théorème 1.6.5. *Soient* A *et* B *deux polynômes avec* $B(0) \neq 0$, *soit* $k > 0$, *alors il existe un polynôme* R *tel que :*

$$A(x) = (a_0 + a_1 x + \ldots a_{k-1} x^{k-1}) Q + x^k R(x) \ .$$

Preuve : Par récurrence sur k.
Application : cas d'un facteur x^α ; cas d'un facteur $(x-a)^\alpha = X^\alpha$.
Exemple 1.6.6. $\frac{1}{x^4(x^2-4)} = \frac{-1}{64(x+2)} - \frac{1}{16x^2} - \frac{1}{4x^4} + \frac{1}{64(x-2)}$.
$\int \frac{1}{x^4(x^2-4)}dx = \frac{-(\log(x+2))}{64} + \frac{\log(x-2)}{64} + \frac{3x^2+4}{48x^3} + C$.
$\frac{x}{(x-1)^3(x^2+1)} = \frac{x+1}{4(x^2+1)} - \frac{1}{4(x-1)} + \frac{1}{2(x-1)^3}$.
$\int \frac{x}{(x-1)^3(x^2+1)}dx = \frac{\log(x^2+1)}{8} + \frac{\mathrm{Arctan}(x)}{4} - \frac{\log(x-1)}{4} - \frac{1}{4x^2-8x+4} + C$.

fin du cours du 25/02/09

1.7 Propriétés des intégrales

Théorème 1.7.1. *a) L'ensemble des fonctions intégrables sur $[a,b]$ est stable par combinaison linéaire (c'est un espace vectoriel), et l'intégrale est linéaire sur cet ensemble.*
b) Positivité : L'intégrale sur $[a,b]$ d'une fonction positive sur $[a,b]$ est positive.
c) Relation de Chasles : Si f est intégrable sur $[a,b]$ et sur $[b,c]$, alors elle est intégrable sur $[a,c]$ et

$$\int_a^c f(t)dt = \int_a^b f(t)dt + \int_b^c f(t)dt \ .$$

Convention : $\int_b^a f(t)dt = -\int_a^b f(t)dt$.
Comme corollaire de la positivité :

Théorème 1.7.2. *a) Si f et g sont intégrables sur $[a,b]$ et :*

$$\forall t \in [a,b] \ , f(t) \leq g(t) \ ,$$

alors :

$$\int_a^b f(t)dt \leq \int_a^b g(t)dt \ .$$

b) Si f est intégrable sur $[a,b]$ alors :

$$\left|\int_a^b f(t)dt\right| \leq \int_a^b |f(t)|dt \ .$$

Théorème 1.7.3 (Limite des sommes de Riemann)**.** *Pour toute fonction f intégrable sur $[a,b]$ la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a + k\frac{b-a}{n})$$

converge vers $\int_a^b f(t)dt$.

Corollaire 1.7.4. *Pour toute fonction f intégrable sur $[0,1]$ la suite de terme général*

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$$

converge vers $\int_0^1 f(t)dt$.

Exercice 1.7.5.

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k^2 + n^2} \ , \lim_{n \to +\infty} u_n = \frac{\pi}{4} \ .$$