Chapitre 2

Fonctions trignonométriques et intégration

Rappel :

Théorème. *Soit $f : I \to J$ une bijection entre les intervalles I et J, et $g : J \to I$ sa réciproque. Si f est dérivable en $a \in I$ de dérivée non nulle, alors g est dérivable en $b = f(a)$, et $g'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.*

2.1 Réciproques des fonctions trigonométriques

2.1.1 La fonction Arctan

$\tan :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\to \mathbb{R}$; $\text{Arctan} : \mathbb{R} \to]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.
Pour $b \in \mathbb{R}$, $\text{Arctan}' b = \frac{1}{1+b^2}$.

2.1.2 La fonction Arcsin

$\sin : [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \to [-1, 1]$; $\text{Arcsin} : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.
Pour $b \in]-1, 1[$, $\text{Arcsin}' b = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}$.
Conséquence : $\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \text{Arcsin} t \ + \ C$.

2.1.3 La fonction Arccos

$\cos : [0, \pi] \to [-1, 1]$; $\text{Arccos} : [-1, 1] \to [0, \pi]$.
Pour $b \in]-1, 1[$, $\text{Arccos}' b = \frac{-1}{\sqrt{1-b^2}}$.

2.2 Trigonométrie hyperbolique

$$\mathrm{ch}t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}\ ,\ \mathrm{sh}t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}\ ,\ \mathrm{th}t = \frac{\mathrm{sh}t}{\mathrm{ch}t}\ .$$
$$\mathrm{ch}'t = \mathrm{sh}t\ ,\ \mathrm{sh}'t = \mathrm{ch}t\ ,\ \mathrm{th}'t = 1 - \mathrm{th}^2 t\ .$$

2.2.1 La fonction Argth

th : $]-1,1[\to \mathbb{R}$; Argsh : $\mathbb{R} \to]-1,1[$.
Pour $b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argth}'b = \frac{1}{1-b^2}$.
Conséquence : $\int \frac{dt}{1-t^2} = \mathrm{Argth}t\ +\ C = \ln\frac{1+t}{1-t}\ +\ C$, sur $]-1,1[$.

2.2.2 La fonction Argsh

sh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$; Argsh : $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$.
Pour $b \in \mathbb{R}$, $\mathrm{Argsh}'b = \frac{1}{\sqrt{1+b^2}}$.
Conséquence : $\int \frac{dt}{\sqrt{1+t^2}} = \mathrm{Argsh}t\ +\ C$, sur $\mathbb{R}$.
Autre expression :
$$\mathrm{Argsh}t = \ln(t + \sqrt{t^1 + 1})\ .$$

2.2.3 La fonction Argch

ch : $[0,+\infty[\to [1,+\infty[$; Argch : $[-1,1] \to [0,+\infty[$.
Pour $b \in]1,+\infty[$, $\mathrm{Argch}'b = \frac{1}{\sqrt{b^2-1}}$.
Conséquence : $\int \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}} = \mathrm{Argch}t\ +\ C$, sur $]1,+\infty[$.
Autre expression :
$$\mathrm{Argch}t = \ln(t + \sqrt{t^1 - 1})\ .$$

2.3 Intégration des polynômes trigonométriques

2.3.1 Linéarisation

On peut utiliser

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}\ .$$

Exemple 2.3.1. $\cos(x)^5 = \frac{\cos 5x}{16} + \frac{5\cos 3x}{16} + \frac{5\cos x}{8}$.
$\int \cos(x)^5 dx = \frac{\sin 5x}{80} + \frac{5\sin 3x}{48} + \frac{5\sin x}{8}$.

Autre méthode :
Exemple 2.3.2. $\int \cos(x)^2 \sin(x)^3 dx = \frac{3\cos(x)^5 - 5\cos(x)^3}{15} + C$.

2.4 Intégration par changement de variables

Le changement de variable $t = \tan\frac{x}{2}$ permet de ramener à une fraction rationnelle :

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}\ ,\ \sin x = \frac{2t}{1+t^2}\ ,\ \tan x = \frac{2t}{1-t^2}\ .$$

Exemple 2.4.1. $\int \frac{1}{\sin(x)+1} dx = \frac{-2}{1+\tan\frac{x}{2}} + C$.