Chapitre 3

Intégration numérique

3.1 Méthode des rectangles

Soit f une fonction intégrable sur $[a, b]$. Pour $n > 0$, on pose : $h = \frac{b-a}{n}$. On rappelle que les suites $(s_n)_{n\geq 1}$ et $(S_n)_{n\geq 1}$ (sommes de Riemann) :

$$s_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{b-a}{n} f(a+kh) \quad , \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{b-a}{n} f(a+kh)$$

convergent vers $I = \int_a^b f(t)dt$.

Proposition 3.1.1 (Cas monotone)**.** *Si f est monotone sur $[a, b]$, alors s_n et S_n donnent un encadrement de I de diamètre majoré par : $\frac{(f(b)-f(a))(b-a)}{n}$.*

Théorème 3.1.2. *Si f est dérivable, avec $|f'(t)| \leq M_1$ pour $t \in [a, b]$, alors s_n et S_n sont des valeurs approchées de I, et la valeur absolue de l'erreur est majorée par $\frac{M_1(b-a)^2}{2n}$.*

3.2 Méthode du milieu

Théorème 3.2.1. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$, de dérivée seconde majorée par M_2, $h = \frac{b-a}{n}$.*

$$I^m = h \sum_{k=1}^{N} f(a - \frac{h}{2} + kh)$$

est une valeur approchée de $I = \int_a^b f(t)dt$, et

$$|I - E^m| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{24n^2} \quad .$$

3.3 Méthode des trapèzes

Théorème 3.3.1. *Soit f une fonction deux fois dérivable sur $[a, b]$, de dérivée seconde majorée par M_2, $h = \frac{b-a}{n}$.*

$$I^t = h \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a + (k-1)h) + f(a + kh)}{2}$$

est une valeur approchée de $I = \int_a^b f(t)dt$, et

$$|I - E^m| \leq \frac{M_2(b-a)^3}{12n^2} \ .$$

3.4 Méthode de Simpson

Théorème 3.4.1. *Soit f une fonction quatre fois dériable sur $[a, b]$, de dérivée quatrième majorée par M_4 ; $h = \frac{b-a}{n}$.*

$$I^s = h \sum_{i=1}^{N} \frac{f(a + (k-1)h) + f(a + kh) + 4f(a - \frac{h}{2} + kh)}{6}$$

est une valeur approchée de $I = \int_a^b f(t)dt$, et

$$|I - E^s| \leq \frac{M_4(b-a)^5}{2880n^4} \ .$$

3.5 Exemple de calcul

Commandes sage :

```
f(x)=ln(x)
g(x)=x*ln(x)-x
L=list(N(f(2+k/10)) for k in range(10))
L1=list(N(f(2+k/10)) for k in range(1,11))
print(sum(L)/10,sum(L1)/10)
L2=list(N(f(2+1/20+k/10)) for k in range(10))
print(sum(L2)/10)
print((sum(L)+sum(L1))/20)
print((sum(L1)+sum(L))/60+(4/60)*sum(L2))
print(N(g(3)-g(2)))
```

Encadrement par la méthode des rectangles : $(0.889130385002806, 0.929676895813622)$
Méthode du milieu : 0.909611927969815
Méthode des trapèzes : 0.909403640408214
Méthode de Simpson : 0.909542498782615
Avec la primitive : 0.909542504884439.