Chapitre 5

Applications linéaires et géométrie

On rappelle qu'un espace vectoriel est une structure qui permet d'écrire des combinaisons linéaires de vecteurs ; les coefficients peuvent être réels ou complexes (ou plus généralement dans un *corps*. Dans ce cours on utilise la notation $\mathbb{K}$ pour le *corps des coefficients* qui peut être $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

5.1 Applications linéaires

5.1.1 Définitions

Définition 5.1.1. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \to F$ est linéaire si et seulement si elle respecte les combinaisons linéaires :

$$\forall \lambda \in \mathbb{K},\ \forall \mu \in \mathbb{K},\ ,\forall u \in E,\ \forall v \in E,\ ,f(\lambda u + \mu v) = \lambda f(u) + \mu f(v)\ .$$

Lorsque $E = F$, on dit que f est un *endomorphisme* de E.

Exemple.

Définition 5.1.2. Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et $f : E \to F$ une application linéaire.
a) Le noyau de f, noté $\mathrm{Ker}(f)$ est l'ensemble des vecteurs de E d'image nulle.
b) L'image de f est $\mathrm{Im}(f) = f(E) = \{f(u),\ u \in E\}$.
c) Le rang de f est la dimension de l'image : $\mathrm{rg}(f) = \dim(\mathrm{Im}(f))$.

Proposition 5.1.3. *Soient E et F deux espaces vectoriels sur $\mathbb{K}$, et $f : E \to F$ une application linéaire.*

a) Le noyau de f est un sous-espace vectoriel de E.
b) L'image de f est un sous-espace vectoriel de F.

Application aux systèmes linéaires. Soit $A \in \mathrm{Mat}(m \times n, \mathbb{K})$. L'application :

$$\begin{array}{rccc} f_A : & \mathbb{K}^n & \to & \mathbb{K}^m \\ & x & \mapsto & Ax \end{array}$$

est linéaire, et son noyau est la solution de l'équation $Ax = 0_m$.
On définit le *rang* de A comme étant égal à celui de f_A.
Rappel : Une matrice est dite échelonnée, si le nombre de zéros précédent la première valeur non nulle d'une ligne augmente ligne par ligne jusqu'à ce qu'il ne reste plus que des zéros. La méthode du pivot de Gauss permet d'obtenir une matrice échelonnée par transformations élémentaires sur les lignes.

Proposition 5.1.4. *a) La dimension de l'espace solution de l'équation $Ax = 0_n$ est $n - \mathrm{rg}(A)$.*
b) Le rang de A est égal au nombre de pivots d'une matrice échelonnée ligne-équivalente à A.

5.1.2 Matrice d'une application linéaire

Définition 5.1.5. Soient E et E' des espaces vectoriels de bases respectives : $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B = (e'_1, \dots, e'_m)$. La matrice de l'application linéaire $g : E \to E'$, notée $\mathrm{Mat}(g, B, B')$ est la matrice $m \times n$ dont les colonnes sont les coordonnées dans la base B' des images des vecteurs de base :

$$\mathrm{Mat}(g, B, B') = ([g(e_1)]_{B'} \ \dots \ [g(e_n)]_{B'}) \ .$$

Dans le cas où $E = E'$, et $B = B'$, on note : $\mathrm{Mat}(g, B)$, ou simplement $[g]_B$.

Proposition 5.1.6. *Avec les notations précédentes, g est l'application linéaire de matrice M dans les bases B et B' si et seulement si pour tout $u \in E$,*

$$[g(u)]_{B'} = M[u]_B \ .$$

Remarque 5.1.7. Dans le cas des espaces vectoriels $\mathbb{K}^n$ il y a une base préférée, appelée base canonique, mais il peut être utile de considérer une autre base mieux adaptée au problème.

Proposition 5.1.8. *Le rang d'une application linéaire f est égal à celui de sa matrice* $\mathrm{Mat}(f, B, B')$.

Théorème 5.1.9. *Soient E un espace vectoriel de dimension finie, et $f : E \to F$ une application linéaire, alors la dimension du noyau de f est égale à* $\dim(E) - \mathrm{rg}(f)$.

5.1.3 Changement de base

Définition 5.1.10. Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B' = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases du même espace vectoriel E. On appelle matrice de passage de B à B' la matrice P dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs e'_j dans la base B.

Proposition 5.1.11. *Avec les notations précédentes, P est la matrice de passage de B à B' si et seulement si le changement de coordonnées est donné par la formule :*

$$[u]_B = P[u]_{B'} \ .$$

Théorème 5.1.12. *Soient $B = (e_1, \dots, e_n)$ et $B = (e'_1, \dots, e'_n)$ deux bases du même espace vectoriel E, et g une application linéaire de E dans E. Alors les matrices de g dans les bases B et B' sont reliées par la formule :*

$$\mathrm{Mat}(g, B') = P^{-1}\mathrm{Mat}(g, B)P \ .$$

5.2 Notions sur le déterminant

Théorème 5.2.1 (admis). *Il existe une unique application*

$$\det : \mathrm{Mat}(n \times n, \mathbb{K}) \to \mathbb{K} \ ,$$

telle que :

1. *Si T est triangulaire, alors* $\det(T)$ *est le produit de ses termes diagonaux.*
2. *Si B est obtenu à partir de A par une transformation élémentaire sur les lignes, alors :*

   $\det(B) = \det(A)$ *pour une transformation $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$;*
   $\det(B) = -\det(A)$ *pour une transformation $L_i \leftrightarrow L_j$;*
   $\det(B) = \alpha \det(A)$ *pour une transformation $L_i \leftarrow \alpha L_i$.*

Pour une matrice 2×2, on a

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \ .$$

Proposition 5.2.2. *Pour un matrice* 3×3 *:*

$$A = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$$

on a :

$$\det(A) = a \begin{vmatrix} b' & b'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} - b \begin{vmatrix} a' & a'' \\ c' & c'' \end{vmatrix} + c \begin{vmatrix} a' & a'' \\ b' & b'' \end{vmatrix} .$$

Proposition 5.2.3. *Une matrice carrée est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.*

Théorème 5.2.4. *Le déterminant d'un produit de matrices carrées est égal au produit des déterminants.*

Corollaire 5.2.5. *Pour toute matrice inversible* P*, le déterminant de* P^{-1} *est l'inverse du déterminant de* P*.*

Corollaire 5.2.6. *Pour toute matrice carrée* A *et pour toute matrice inversible* P *de même ordre que* A*, on a :*

$$\det(P^{-1}AP) = \det(A) .$$

Remarque 5.2.7. Cela veut dire que le déterminant n'est pas modifié lors d'un changement de base.

5.3 Projections et symétries vectorielles

Définition 5.3.1. Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Deux sous-espaces vectoriels F et G sont supplémentaires si et seulement si :

$$E = F + G \text{ et } F \cap G = \{0_E\} .$$

On écrit alors : $E = F \oplus G$.

Proposition 5.3.2. *Deux sous-espaces vectoriels* F *et* G *sont supplémentaires si et seulement si tout vecteur* u *de* E *s'exprime de manière unique sous la forme* $u = u' + u''$*, avec* $u' \in F$ *et* $u'' \in G$*.*

Définition 5.3.3. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans l'espace vectoriel E. La projection vectorielle sur F de direction G est l'application qui a un vecteur décomposé $u = u' + u''$ associe u'.

La projection vectorielle sur F de direction G est une application linéaire. Dans une base obtenue en juxtaposant un base de F et une base de G, la matrice est diagonale, avec valeurs diagonales égales à 1 pour les vecteurs de F et 0 pour les vecteurs de G.

Définition 5.3.4. Soient F et G deux sous-espaces vectoriels supplémentaires dans l'espace vectoriel E. La symétrie vectorielle par rapport à F de direction G est l'application qui a un vecteur décomposé $u = u' + u''$ associe $u' - u''$.

La symétrie vectorielle par rapport à F de direction G est une application linéaire. Dans une base obtenue en juxtaposant un base de F et une base de G, la matrice est diagonale, avec valeurs diagonales égales à 1 pour les vecteurs de F et -1 pour les vecteurs de G.

5.4 Structure euclidienne sur $\mathbb{R}^n$

Définition 5.4.1. Le produit scalaire de deux vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ est :

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \ .$$

Définition 5.4.2. La transposée ${}^tM$ d'une matrice M est obtenue en intervertissant les lignes et les colonnes, en particulier en transposant un vecteur colonne on obtient un vecteur ligne.

Remarque 5.4.3. Le produit scalaire peut s'écrire :

$$\langle x, y \rangle = {}^t x y = {}^t y x \ .$$

Définition 5.4.4. La norme euclidienne de $x \in \mathbb{R}^n$ est :

$$||x|| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \ .$$

Proposition 5.4.5 (Cauchy-Schwarz)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ |\langle x, y \rangle| \leq ||x|| \times ||y|| \ .$$

Proposition 5.4.6 (Inégalité triangulaire)**.**

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \forall y \in \mathbb{R}^n,\ ||x+y|| \leq ||x|| + ||y||\ .$$

En plus de l'inégalité triangulaire, la norme euclidienne satisfait les deux propriétés suivantes (définition générale d'une norme) :
a) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ ||x|| = 0 \iff x = 0_n$;
b) $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ \lambda \in \mathbb{R}\ , ||\lambda x|| = |\lambda| \times ||x||$.

Définition 5.4.7. a) Deux vecteurs sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
b) Une base est orthonormée si et seulement si ses vecteurs sont de norme 1 et deux à deux orthogonaux.

Le procédé qui suit construit une base orthonormée.

Proposition 5.4.8 (Orthonormalisation, cas $\mathbb{R}^2$)**.** *Pour toute base* (e_1, e_2) *de* $\mathbb{R}^2$*, les formules :*
$\epsilon_1 = \frac{1}{||e_1||} e_1,$
$\epsilon_2' = e_2 - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1\ ,\ \epsilon_2 = \frac{1}{||\epsilon_2'||}\epsilon_2'.$
définissent une base orthonormée (ϵ_1, ϵ_2)*.*

Proposition 5.4.9 (Orthonormalisation, cas $\mathbb{R}^3$)**.** *Pour toute base* (e_1, e_2, e_3) *de* $\mathbb{R}^3$*, les formules :*
$\epsilon_1 = \frac{1}{||e_1||} e_1,$
$\epsilon_2' = e_2 - \langle e_2, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1\ ,\ \epsilon_2 = \frac{1}{||\epsilon_2'||}\epsilon_2',$
$\epsilon_3' = e_3 - \langle e_3, \epsilon_1 \rangle \epsilon_1 - \langle e_3, \epsilon_2 \rangle \epsilon_2\ ,\ \epsilon_3 = \frac{1}{||\epsilon_3'||}\epsilon_3',$
définissent une base orthonormée $(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$*.*

Définition 5.4.10. L'orthogonal d'un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ est l'ensemble noté $F^\perp$ des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs de F.

Remarque 5.4.11. Un vecteur est dans $F^\perp$ si et seulement s'il est orthogonal à une base de F.

Proposition 5.4.12. *Pour tout sous-espace* F *de* $\mathbb{R}^n$*,* $F^\perp$ *est un sous-espace supplémentaire de* F*.*

Proposition 5.4.13. *Soit* $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_p)$ *une base orthonormée du sous-espace vectoriel* F*, alors la projection orthogonale sur* F *(de direction* $F^\perp$*),* p_F*, est telle que :*

$$\forall x \in \mathbb{R}^n\ ,\ p_F(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, \epsilon_i \rangle \epsilon_i\ .$$

5.5 Isométries vectorielles

5.5.1 Définition

Définition 5.5.1. Une isométrie vectorielle est une application linéaire qui conserve la norme.

Proposition 5.5.2. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$. Il y a équivalence entre :*
a) f est une isométrie vectorielle ;
b) f conserve le produit scalaire ;
c) f transforme une base orthonormée en une base orthonormée.

Proposition 5.5.3. *Soit f une application linéaire de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{R}^n$, et M sa matrice dans une base orthonormée. L'application f est une isométrie si et seulement si : ${}^tMM = I_n$.*

$$\left(I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \textit{ est la matrice unité.} \right)$$

5.5.2 Déterminant d'une isométrie vectorielle

Théorème 5.5.4. *Toute matrice carrée a même déterminant que sa transposée.*

Corollaire 5.5.5. *Une matrice d'isométrie vectorielle est de déterminant ± 1.*

Cela permet de classifier les isométries vectorielles : une isométrie vectorielle est positive ou négative selon le signe de son déterminant.
Dans $\mathbb{R}^n$, cela permet également de classifier les bases orthonormées. On se sert de la base canonique $\mathcal{B}_0$ comme référence pour *l'orientation*. La matrice de passage de B_0 à une autre base orthonormée B est de déterminant ± 1.

Définition 5.5.6. Une base orthonormée $\mathcal{B}$ de $\mathbb{R}^n$ est directe si et seulement si la matrice de passage de la base canonique $\mathcal{B}_0$ à la base $\mathcal{B}$ est de déterminant $+1$.

5.5.3 Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^2$

Proposition 5.5.7. *Dans une base orthonormée une isométrie vectorielle positive a une matrice de la forme*

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}\ ,\ a^2+b^2=1$$

et une isométrie vectorielle négative a une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}\ , a^2+b^2=1.$$

Proposition 5.5.8. *Une isométrie vectorielle négative de $\mathbb{R}^2$ est une symétrie orthogonale par rapport à une droite vectorielle.*

Proposition 5.5.9. *Une isométrie vectorielle positive a la même matrice dans toute base orthonormée directe.*

La matrice dans une base orthonormée directe d'une isométrie vectorielle positive s'écrit :

$$\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Définition 5.5.10. On appelle rotation vectorielle d'angle α l'isométrie vectorielle décrite ci-dessus.

Aire orientée et déterminant :

Proposition 5.5.11. *Soit u et v deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$, alors* $\det(u,v)$ *est l'aire orientée du parallélogramme "construit sur u et v".*

Remarque 5.5.12. Le déterminant de deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$ est le même dans toutes les bases orthonormées directes.

5.5.4 Isométries vectorielles de $\mathbb{R}^3$

On peut classifier les isométries vectorielles f de $\mathbb{R}^3$ suivant la dimension du sous-espace $\mathrm{Inv}(f)$ formé par les vecteurs invariants (égaux à leur image).

Théorème 5.5.13. *a) Pour toute isométrie vectorielle positive de $\mathbb{R}^3$, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

avec comme cas particulier l'application identique Id *; dans les autres cas (rotation)* $\mathrm{Inv}(f)$ *est de dimension* 1.
b) Pour toute isométrie vectorielle négative de $\mathbb{R}^3$*, il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice est de la forme :*

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix},$$

avec comme cas particuliers les symétries orthogonales par rapport à un plan vectoriel, $\mathrm{Inv}(f)$ *est alors de dimension* 2 *; dans les autres cas* $\mathrm{Inv}(f)$ *est de dimension* 0.

5.6 Produit vectoriel et produit mixte.

Définition 5.6.1. Le produit vectoriel de deux vecteurs $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ et $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ est le vecteur

$$x \wedge y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$$

Proposition 5.6.2. *Pour tous les vecteurs* u, v *et* w *de* $\mathbb{R}^3$ *le produit scalaire* $((u \wedge v).w)$ *est égal au déterminant* $\det(u, v, w)$.

Définition 5.6.3. Le produit précédent est appelé le produit mixte de u, v et w. On peut le noter $[u, v, w]$.

Proposition 5.6.4. *a) Le produit vectoriel de* u *et* v *est nul si et seulement si* u *et* v *sont colinéaires.*
b) Soient u *et* v *deux vecteurs qui engendrent un plan vectoriel de base orthonormée* (e_1, e_2)*, et soit* (e_1, e_2, e_3) *la base orthonormée directe complétée, alors* $u \wedge v = \lambda e_3$*, où* λ *est l'aire du parallélogramme construit sur* u *et* v.

Remarque 5.6.5. En particulier, avec les notations précédentes : $e_1 \wedge e_2 = e_3$. Ceci peut-être utile pour calculer e_3.