

UNIVERSITÉ PARIS DIDEROT - PARIS 7
Année 2008-2009, Licence 1, MP2
Mathématiques fondamentales

Examen du 05/06/09 (durée : 3 heures)

*Document autorisé : résumé de cours manuscrit sur une page recto-verso de format A4 (21×29,7).
La calculatrice n'est pas autorisée.*

Barème indicatif : 5 + 5 + 5 + 5.

I

1. Rappeler l'expression de $\cos x$ et $\sin x$ en fonction de $t = \tan \frac{x}{2}$, pour $-\pi < x < \pi$.
2. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle :

$$f(t) = \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} .$$

3. Enoncer le théorème de changement de variable pour les intégrales, et calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos x}{1 + \sin x + \cos x} dx .$$

II

On considère la fonction f de deux variables définie sur $\mathbb{R}^2$ par :

$$f(x, y) = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y .$$

1. Calculer les dérivées partielles premières de la fonction f .
2. Quels sont les points critiques de f ?
3. Calculer les dérivées partielles secondes de f .
4. Quels sont les éventuels extrema locaux de f ?

III

Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ donnée par :

$$f(x, y, z) = (x + 2y + 2z, 2x + y - 2z, 2x - 2y + z).$$

1. Ecrire la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$, notée $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$.
2. Soit $\mathcal{B}' = (e_1 + e_2, e_1 - e_2 + 2e_3, e_1 - e_2 - e_3)$.
 - (a) Montrer que $\mathcal{B}'$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
 - (b) Ecrire la matrice P de changement de base de $\mathcal{B}$ à $\mathcal{B}'$. Calculer P^{-1} .
 - (c) Quelle est la matrice de f dans la base $\mathcal{B}'$?

IV

1. Résoudre les équations différentielles suivantes, où z est une fonction de la variable t :

$$z'' - 9z = 0 \quad (1) .$$

$$z'' - 9z = 9e^{3t} \quad (2) .$$

2. On considère pour $x \in]0; +\infty[$ l'équation différentielle (3), où y est une fonction de la variable x :

$$x^2 y'' + xy' - 9y = 9x^2 \quad (3) .$$

- (a) Quelle est l'équation obtenue en appliquant à (3) le changement de variable $x = e^t$, $z(t) = y(e^t)$?
(b) Résoudre pour $x \in]0; +\infty[$ l'équation (3).