

Exercice I

$$1) \cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$2) f(t) = \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} = \frac{a}{1+t} + \frac{b+ct}{1+t^2}$$

$$(1+t)f(t) = \frac{1}{1+t^2} \Big|_{t=-1} = \frac{1}{2} = a$$

$$(1+t^2)f(t) = \frac{1}{1+t} \Big|_{t=i} = \frac{1}{1+i} = \frac{1-i}{2} = b+ci$$
$$b = \frac{1}{2}$$
$$c = -\frac{1}{2}$$

$$f(t) = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1-t}{1+t^2} \right)$$

3) Si u a une dérivée continue sur $[a; b]$ et f est continue sur $u([a; b])$

$$\text{alors } \int_{u(a)}^{u(b)} f(x) dx = \int_a^b f(u(t)) u'(t) dt$$

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1+\cos x}{1+\sin x + \cos x} dx$$

On effectue le changement de variable

$$t = \tan \frac{x}{2}$$

$$\cos x = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$x(t) = 2 \arctan t$$

$$dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\sin x = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$I = \int_0^1 \frac{1 + \frac{1-t^2}{1+t^2}}{1 + \frac{2t}{1+t^2} + \frac{1-t^2}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{\frac{1+t^2+1-t^2}{1+t^2}}{\frac{1+t^2+2t+1-t^2}{1+t^2}} \times \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2}{2+2t} \times \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{(1+t)(1+t^2)} dt$$

$$= 2 \int_0^1 \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1-t}{1+t^2} \right) dt$$

$$= \int_0^1 \left(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1+t^2} - \frac{t}{1+t^2} \right) dt$$

$$I = \left[\ln(1+t) + \arctan t - \frac{1}{2} \ln(1+t^2) \right]_0^1$$

$$= \ln 2 + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2$$

$$= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{\pi}{4}$$

Exercice II

$$1) \frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 + 3y^2 - 15$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6xy - 12$$

2) Les points critiques de f correspondent

$$\text{à } \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 3y^2 - 15 = 0 \\ 6xy - 12 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - 5 = 0 \\ xy - 2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - 2xy - 5 = 0 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 = 9 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+y = 3 \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x+y = -3 \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 3x + 2 = 0 \text{ (E}_1\text{)} \\ xy = 2 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x^2 + 3x + 2 = 0 \text{ (E}_2\text{)} \\ xy = 2 \end{cases}$$

$$\Delta_{(E_1)} = (-3)^2 - 4 \times 2 = 1$$

$$x_1 = \frac{3-1}{2} = 1 \Rightarrow y_1 = 2$$

$$x_2 = \frac{3+1}{2} = 2 \Rightarrow y_2 = 1$$

$$\Delta(2,1) = 3^2 - 4 \times 2 = 1$$

$$x_3 = \frac{-3-1}{2} = -2 \Rightarrow y_3 = -1$$

$$x_4 = \frac{-3+1}{2} = -1 \Rightarrow y_4 = -2$$

Il y a donc 4 solutions au système
donc 4 points critiques qui sont

$$(1; 2), (2; 1), (-2; -1), (-1; -2)$$

$$3) \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 6y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x$$

$$4) H_f = \begin{pmatrix} \lambda & \gamma \\ \gamma & \epsilon \end{pmatrix} \quad \text{avec } \lambda = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \gamma = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \quad \epsilon = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$H_f(1; 2) = \begin{pmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} \quad \Delta = \lambda^2 - \gamma^2 = 108 > 0 \Rightarrow \text{point selle}$$

$$H_f(2; 1) = \begin{pmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{pmatrix} \quad \Delta = -108 < 0 \Rightarrow \text{extremum}$$

$\lambda > 0, \epsilon > 0 \Rightarrow \text{minimum}$

$$H_f(-1; -2) = \begin{pmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{pmatrix} \quad \Delta = 108 > 0 \Rightarrow \text{point selle}$$

$$H_f(-2; -1) = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{pmatrix} \quad \Delta = -108 < 0 \Rightarrow \text{extremum}$$

Exercice 3

$$1) A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

2) a) La matrice P formée par les coordonnées des vecteurs de B' est de rang 3 :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

b) La matrice de passage est P .

P^{-1} est la matrice de passage de B' à B :

On note $B' = (e'_1, e'_2, e'_3)$

$$e_3 = \frac{1}{3} (e'_2 - e'_3)$$

$$e_1 + e_2 = e'_1$$

$$e_1 - e_2 = e'_2 - 2e_3 = \frac{1}{3} e'_2 + \frac{2}{3} e'_3$$

$$e_1 = \frac{1}{2} e'_1 + \frac{1}{6} e'_2 + \frac{1}{3} e'_3$$

$$e_2 = \frac{1}{2} e'_1 - \frac{1}{6} e'_2 - \frac{1}{3} e'_3$$

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{6} & -\frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$c) A' = P^{-1} A P$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 3 & 3 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 9 & 9 & 0 \\ 3 & -3 & 6 \\ -6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & -18 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Exercice IV

1) $z'' - 9z = 0$

L'équation caractéristique est $\lambda^2 - 9 = 0$

$$\Delta = 36$$

$$\lambda_1 = -3$$

$$\lambda_2 = 3$$

$$\text{donc } z(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

3 est racine de (1)

donc la forme générale d'une solution particulière ^{de (2)} est

$$z(t) = a t e^{3t}$$

$$z'(t) = a e^{3t} + 3a t e^{3t}$$

$$z''(t) = 3a e^{3t} + 3a e^{3t} + 9a t e^{3t}$$

$$z''(t) - 9z(t) = 6a e^{3t} + 9a t e^{3t} - 9a t e^{3t} = 6a e^{3t}$$

$$\text{donc } a = \frac{3}{2}$$

$$z(t) = \frac{3}{2} t e^{3t} \text{ est une solution particulière de (2)}$$

La solution générale de (2) est

$$z(t) = \frac{3}{2} t e^{3t} + C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2) a) $z(t) = y(e^t)$

$$z'(t) = y'(e^t) e^t = x y'(x)$$

$$z''(t) = y''(e^t) e^{2t} + y'(e^t) e^t = x^2 y''(x) + x y'(x)$$

$$(3) \Leftrightarrow z''(t) - 9z(t) = 9e^{2t}$$

b) La solution de l'équation homogène associée est $z(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2 n' est pas racine de l'équation caractéristique donc une solution particulière est de la forme

$$z(t) = a e^{2t}$$

$$z'(t) = 2a e^{2t}$$

$$z''(t) = 4a e^{2t}$$

$$z''(t) - 9z(t) = 4a e^{2t} - 9a e^{2t} = -5a e^{2t} = 9e^{2t}$$

$$\text{donc } a = -\frac{9}{5}$$

une solution particulière est $z(t) = -\frac{9}{5} e^{2t}$

La solution générale est $z(t) = -\frac{9}{5} e^{2t} + C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}$
 $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

$$x = e^t \Rightarrow t = \ln x$$

$$y(t) = y(x)$$

donc la solution pour $x \in]0; +\infty[$ est

$$y(x) = -\frac{9}{5} e^{2 \ln x} + C_1 e^{-3 \ln x} + C_2 e^{3 \ln x}$$

$$= -\frac{9}{5} x^2 + C_1 x^{-3} + C_2 x^3, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$