Chapitre 1

Variétés de dimension 3 et 4, invariants classiques

1.1 Variétés à bord, recollement

On rappelle qu'une variété topologique de dimension n est un espace topologique séparé dénombrable à l'infini, dont tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. En remplaçant $\mathbb{R}^n$ par le demi-espace $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}$ on obtient la notion de variété à bord.

Exercice 1.1.1. a) Montrer que la dimension est bien définie : une variété de dimension n n'est pas homéomorphe à une variété de dimension $m \neq n$.
b) Définir le bord d'une variété et montrer que c'est une variété de dimension $n-1$.

Exercice 1.1.2. a) Montrer que toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien $\mathbb{R}^N$.
b) Montrer plus généralement que toute variété se plonge dans $\mathbb{R}^\infty = \varinjlim_n \mathbb{R}^n$ (préciser la topologie sur $\mathbb{R}^\infty$).

Une variété lisse est une variété munie d'un atlas maximal dont les changements de carte sont de classe C^∞. Dans ce cours nous considérerons le plus souvent des variétés lisses.

Remarque 1.1.3. Les variétés topologiques de dimension inférieure ou égale à 3 admettent une structure lisse unique à difféomorphisme près.

Nous envisagerons également des variétés avec structure PL (linéaires par morceaux) ; une structure PL est une classe d'équivalence de triangulations, deux triangulations étant équivalentes si et seulement si elles admettent une subdivision commune. Une structure lisse définit une structure PL représentée par n'importe quelle triangulation de classe C^1 [Wh]. En dimension inférieure ou égale à 6, toute variété PL admet une structure lisse, unique à difféomorphisme près.

Etant donné deux variétés à bord M_1 et M_2 de dimension n, et $f : \partial M_2 \to \partial M_1$ un difféomorphisme, on définit le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ comme l'espace topologique quotient de l'union disjointe $M_1 \amalg M_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $x_2 \sim f(x_2)$ pour tout $x_2 \in \partial M_2$.

Exercice 1.1.4. Montrer que pour toute variété lisse à bord M, il existe un collier : un plongement lisse $c :]-1, 0] \times \partial M \to M$ tel que $c(0, .) = \mathrm{Id}_{\partial M}$.

Proposition 1.1.5. *a) Le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ est une variété topologique de dimension n.*
b) M admet une structure lisse qui étend celle de M_1 et M_2, unique à difféomorphisme près de support un voisinage arbitraire du lieu de recollement.
c) Si M_1 et M_2 sont orientées, et si f renverse l'orientation, alors M est orientée,

Remarque 1.1.6. Une paire de colliers détermine une structure lisse précise sur le recollement M.

On peut faire cette construction dans le cas où $f : A \to M_1$ est un plongement d'une sous-variété à bord $A \subset \partial M_2$.

Exercice 1.1.7. Montrer que le recollement précédent *le long d'une sous-variété du bord* admet une structure lisse.

Définition 1.1.8. a) Une isotopie ambiante (lisse) d'une variété N est une application (lisse)

$$\begin{array}{rrcl} h: & [0,1] \times N & \to & N \\ & (t,x) & \mapsto & h(t,x) = h_t(x) \end{array}$$

telle que : $h_0 = Id_N$.
b) Deux plongements $f, g : A \to N$ sont isotopes si et seulement s'il existe un isotopie h telle que : $g = h_1 \circ f$.

Exercice 1.1.9. Montrer que si $f, g : A \to \partial M_1$ sont des plongements isotopes, alors les variétés recollées $M = M_1 \cup_f M_2$ et $M = M_1 \cup_g M_2$ sont homéomorphes .

1.2 Construction de variétés

1.2.1 Premiers exemples de variétés de dimension 3

S^3, $S^2 \times S^1$, $\Sigma_g \times S^1$, $\mathbb{R}P^3$.

1.2.2 Recollement de tores plein

Pour $A = \begin{pmatrix} r & q \\ s & p \end{pmatrix} \in SL_2(\mathbb{Z})$, on définit :

$$\begin{array}{rrcl} f_A : & -(S^1 \times S^1) = \partial(S^1 \times D^2) & \to & S^1 \times S^1 = \partial(D^2 \times S^1) \\ & (z, z') & \mapsto & (z^r z'^q, z^s z'^p) \end{array}$$

$$M_A = D^2 \times S^1 \cup_{f_A} S^1 \times D^2 \ .$$

Les variétés M_A sont orientées. On va s'intéresser au problème de classification de ces variétés, qu'on appellera 3-variétés de genre 1, à difféomorphisme (resp. difféomorphisme orienté) près.

Exercice 1.2.1.

1. Calculer le groupe fondamental et l'homologie de M_A.
2. Démontrer que $A = \begin{pmatrix} r & q \\ s & p \end{pmatrix}$ et $A' = \begin{pmatrix} r' & q \\ s' & p \end{pmatrix}$ définissent des variétés M_A et $M_{A'}$ (positivement) difféomorphes.
3. Montrer que toute variété de genre 1 qui n'est pas difféomorphe à S^3 ou $S^2 \times S^1$ est (positivement) difféomorphe à une variété M_A avec $A = \begin{pmatrix} r & q \\ s & p \end{pmatrix}$, $0 < q < p$. On notera $L(p, q)$ cette variété (espace lenticulaire).

Courbes fermées simples sur le tore ; difféotopies du tore et du tore plein

[R, Ch2]

1.2.3 Chirurgie sur un noeud

Soit $g : D^2 \times S^1 \to S^3$ un plongement. On obtient une variété orientée de dimension 3 :

$$M_g = (S^3 - g(\mathring{D}^2 \times S^1)) \cup_{g_{|S^1 \times S^1}} S^1 \times D^2 \ .$$

La variété M_g est dite obtenue par chirurgie sur le noeud solide (ou noeud parallélisé) défini par g.

Ici un noeud solide (ou noeud parallélisé) est une plongement du tore plein $D^2 \times S^1$, le plus souvent considéré à isotopie près.

Proposition 1.2.2. *A difféomorphisme près, la variété obtenue ne dépend que de la classe d'isotopie de g.*

Proposition 1.2.3. *A difféomorphisme près, la variété obtenue ne dépend que de la classe d'isotopie de l'âme du noeud solide : $l = g(0 \times S^1)$, et de l'entier $f = lk(l, l^+)$.*

Ici $l^+ = g(1 \times S^1)$ est le *parallèle de chirurgie*, et $f = lk(l, l^+)$ est le coefficient d'enlacement : le nombre d'intersection avec signe de l^+ avec une surface orientée plongée dans S^3, de bord l.

1.3 Invariants homologiques en dimension 3

Dualité de Poincaré et théorie d'intersection

[Bre, ch6]

Par dualité de Poincaré et formule des coefficients universels, tous les groupes d'homologie et cohomologie des variétés M de dimension 3 orientées compactes sans bord se déduisent de $H_1(M, \mathbb{Z})$.

A une suite exacte courte de coefficients correspond une suite exacte longue en homologie appelée suite exacte de Bockstein. Dans le cas de :

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \to,$$

on obtient un connectant appelé homomorphisme de Bockstein

$$\beta : H_1(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z}) \to H_1(M, \mathbb{Z}) \to 0$$

dont l'image est la torsion : $\mathrm{Tors}(H_1(M, \mathbb{Z})$.

Définition 1.3.1. Pour $x, y \in \mathrm{Tors}(H_1(M, \mathbb{Z})$, on définit l'enlacement $e(x, y)$ par :

$$e(x, y) = x.\tilde{y} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \ \text{ où } \ \beta(\tilde{y}) = y \ .$$

Proposition 1.3.2. *a) L'enlacement* $e : \mathrm{Tors}(H_1(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathrm{Tors}(H_1(M, \mathbb{Z}) \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ *est bien défini et symétrique.*
b) La forme d'enlacement est non singulière : l'application naturelle

$$\mathrm{Tors}(H_1(M, \mathbb{Z}) \to Hom(\mathrm{Tors}(H_1(M, \mathbb{Z}), \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$$

est un isomorphisme.

Application aux 3-variétés de genre 1 $L(p, q)$ (espaces lenticulaires).

Exercice 1.3.3 (Application aux espaces lenticulaires).

1. Calculer $e(x, x)$ pour un générateur de $H_1(L(p, q))$.
2. En déduire que si $L(p, q)$ et $L(p', q')$ sont positivement difféomorphes, alors $p = p'$ et il existe k tel que $q' \equiv k^2 q \pmod{p}$.
3. Etudier le changement d'orientation. Montrer que si $L(p, q)$ et $L(p', q')$ sont difféomorphes, alors $p = p'$ et il existe k tel que $q' \equiv \pm k^2 q \pmod{p}$.

1.4 Construction de variétés de dimension 4

1.4.1 Attachement d'une anse d'indice 2

Soit $h : -(D^2 \times S^1) \to S^3$ un plongement. On définit la variété recollée :

$$W_h = D^4 \cup_h D^2 \times D^2 \ ,$$

et son bord

$$M_h = \partial W_h = S^3 - (h(\mathring{D}^2 \times S^1) \cup_{h_{|S^1 \times S^1}} (S^1 \times D^2) \ .$$

Exercice 1.4.1. Calculer l'homologie de W_h et discuter l'homologie de M_h.

1.4.2 Attachement de plusieurs anses d'indice 2

Soit $h = \amalg_{i=1}^m h_i : \amalg_{i=1}^m - (D^2 \times S^1)_i \to S^3$ un plongement. On définit la variété recollée :

$$W_h = D^4 \cup_h (\amalg_i (D^2 \times D^2)_i \ ,$$

et son bord $M_h = \partial W_h$.

Théorème 1.4.2. *a) $H_k(W_L)$ est nul sauf pour $k = 0$ et $k = 2$, et $H_2(W_L)$ est libre de rang m. Une base notée $[L_i]$ de $H_2(W_L)$ est représentée par une surface orientée de bord $l_i = h_i(0 \times S^1)$ recollée à $-(0 \times D^2)_i$.*
b) $H_k(W_L, M_L)$ est nul sauf pour $k = 4$ et $k = 2$, et $H_2(W_L, M_L)$ est libre de rang m. La base notée $[L^i]$ de $H_2(W_L)$, duale de la base $[L_i]$ est représentée par $(D^2 \times 0)_i$.
c) Dans les bases précédentes, la matrice du morphisme d'inclusion est :

$$B_h = (lk(l_i, l_j^+))$$

où $l_j^+ = h_j(1 \times S^1)$, et $lk(l_i, l_j^+)$ est l'enlacement, défini comme l'intersection algébrique de l_j+ avec une surface orientée dans S^3 de bord l_i.

Remarque 1.4.3. Sur un diagramme (projection générique des l_i, l_i^+ sur un plan), l'enlacement est la demi-somme des points d'intersection avec signe :

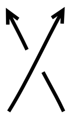
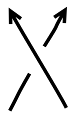
croisement positif :  , croisement négatif : 

FIG. 1.1 – Signe d'un croisement

Définition 1.4.4. La signature d'une variété compacte orientée de dimension 4 est la signature de la forme d'intersection sur $H_2(W_L)$.

Proposition 1.4.5. *La forme d'intersection sur $H_2(W_h)$ a pour matrice B_h ; la signature est donc celle de la matrice symétrique B_h.*

La suite exacte associée à l'inclusion du bord permet de calculer l'homologie du bord.

Théorème 1.4.6. *a) $H_2(M_h)$ est isomorphe au noyau de B_h.*
b) $H_1(M_h)$ est isomorphe au conoyau de B_h.

Notons $\delta : H_2(W_h, M_h) \rightarrow H_1(M_h)$ l'homomorphisme de bord, et $B_h^{\mathbb{Q}}$ le produit tensoriel de $B_h \otimes \mathbb{Q}$.

Théorème 1.4.7. *Pour $x, y \in Tors(H_1(M_h))$ l'enlacement $e(x, y)$ est égal à $\tilde{\alpha}.\beta$, avec : $\delta\beta = y$, $\delta\alpha = x$, $B_h^{\mathbb{Q}}\tilde{\alpha} = \alpha$.*

Bibliographie

[Bre] G. E. Bredon, *Topology and Geometry*, Graduate Texts in Math. Springer-Verlag 1993.

[R] D. Rolfsen, *Knots and Links*, AMS Chelsea Publishing 2003.

[S] A. K. Sosinski, *Differentiable manifolds*, Pure and Applied Math. Vol 136, Academic Press 1993.

[Wh] J. H ; C. Whitehead, *On C^1-complexes*, Ann. of Math. Vol. 41 No 4, (1940) 809–824.