Chapitre 4

Introduction à la théorie des modules

4.1 Définitions et exemples de base

Soit A un anneau.

Définition 4.1.1. Un module (à gauche) sur A est un groupe abélien M muni d'une opération externe :

$$\begin{array}{rcl} A \times M & \to & M \\ (a, v) & \mapsto & a.v \end{array}$$

qui vérifie :

la double distributivité : $\forall (a,b) \in A^2 \ \forall v \in M \ (a+b).v = a.v + b.v$ et $\forall a \in A \ \forall (v,w) \in M^2 \ a.(v+w) = a.v + a.w$;

l'associativité mixte : $\forall (a,b) \in A^2 \ \forall v \in M \ a.(b.v) = (ab).v$;

l'action du neutre : $\forall v \in M \ 1.v = v$.

Un module sur un corps est un espace vectoriel.

Exemples 4.1.2.

1. Un anneau A est un module sur lui-même ; une algèbre sur A est aussi un module.
2. Un groupe abélien est un module sur $\mathbb{Z}$.

Définition 4.1.3. Un sous-module d'un A-module M est un sous-groupe abélien qui est stable pour l'opération externe.

Remarque 4.1.4. Les sous-modules de l'anneau A, vu comme module à gauche sur lui-même sont les idéaux à gauche.

L'intersection d'une famille de sous-modules est un sous-module, et on a donc une notion de sous-module engendré par une partie non vide $F \subset M$: le plus petit sous-module qui contient F.

Proposition 4.1.5. *Le sous-module engendré par $F \subset M$ est l'ensemble $\mathcal{C}(F)$ des combinaisons linéaires des éléments de F.*

Définition 4.1.6. La somme (interne) d'une famille de sous-modules de M est le sous-module engendré par la réunion. On la note : $\sum\limits_{i \in I} M_i$.

Définition 4.1.7. Une application $f : M \to N$ entre les A-modules M et N est A-linéaire si et seulement si elle respecte les combinaisons linéaires :

$$\forall (a, b) \in A^2 \ \forall (v, w) \in M^2 \ f(a.v + b.w) = a.f(v) + b.f(w) \ .$$

Les applications A-linéaires de M vers N forment un module noté $\mathrm{Hom}_A(M, N)$. Les applications A-linéaires de M dans M (endomorphismes) forment une algèbre sur A, noté $\mathrm{End}_A(M)$. L'application réciproque d'un endomorphisme bijectif est linéaire : les endomorphismes bijectifs du A-module M forment un groupe noté $\mathrm{GL}_A(M)$.

Proposition 4.1.8. *Image et noyau d'une application linéaire sont des sous-modules.*

Fin du cours du 20 octobre

4.2 Exemples fondamentaux

4.2.1 Changement d'anneau

Si B est une A-algèbre, tout B-module est aussi un A-module.

4.2.2 Les modules A^I et $A^{(I)}$

On note A^I l'algèbre des applications de l'ensemble I dans A. On utilisera habituellement la notation $a = (a_i)_{i \in I}$ et le vocabulaire *famille*.
Les familles à support fini forment un idéal, donc un sous-module noté $A^{(I)}$.
Les élément de $A^{(I)}$ s'écrivent de manière unique comme combinaison linéaire des e_i qui prennent la valeur 1 en i et 0 ailleurs (base canonique).

Proposition 4.2.1 (Propriété universelle)**.** *Le A-module $A^{(I)}$ muni de la* base canonique $(e_i)_{i \in I}$ *vérifie la propriété universelle suivante : Pour tout A-module M, et toute famille $(b_i)_{i \in I}$ d'éléments de M, il existe une unique application linéaire $f : A^{(I)} \to M$ qui envoie chaque e_i sur b_i.*

Définition 4.2.2. Le A-module M est libre de base $(b_i)_{i\in I}$ si et seulement si l'application linéaire définie dans la proposition précédente est un isomorphisme.

4.2.3 Somme et produits directs

Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de module.

Définition 4.2.3. Le produit $\prod_{i\in I} M_i$ muni des opérations :

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) \ , \ a.(x_i) = (a.x_i) \ ,$$

est un A-module.

Pour chaque $j \in I$, la projection $p_j : \prod_{i\in I} M_i \to M_j$ est linéaire.

Proposition 4.2.4 (Propriété universelle)**.** *Pour tout A-module N et toute famille d'applications linéaires $f_i : N \to M_i$, il existe une unique application linéaire $f : N \to \prod_{i\in I} M_i$ telle que : $\forall j \ f_j = p_j \circ f$.*

Définition 4.2.5. La somme directe $\bigoplus_{i\in I} M_i$ est le sous-module du produit constitué des familles (x_i) qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls (presque nulles).

Pour chaque $j \in I$, on définit une application linéaire injective : $k_j : M_j \to \bigoplus_{i\in I} M_i$ en associant à x_j la famille dont le seul terme non nul est x_j.

Proposition 4.2.6 (Propriété universelle)**.** *Pour tout A-module N et toute famille d'applications linéaires $g_i : M_j \to N$, il existe une unique application linéaire $g : \bigoplus_{i\in I} M_i \to N$ telle que : $\forall j \ g_j = g \circ k_j$.*

Lorsque les modules M_i sont des sous-modules d'un module M, les inclusions définissent une application linéaire canonique $g : \bigoplus_{i\in I} M_i \to M$.

Définition 4.2.7. a) On dit que la somme interne des modules M_i est directe si et seulement si l'application canonique g est injective.
b) On dit que M est somme directe des M_i lorsque l'application canonique g est bijective.
c) Deux sous-modules de M sont supplémentaires si et seulement si M est égal à leur somme directe (chacun est dit supplémentaire de l'autre).

Exercice 4.2.8. Montrer que des sous-modules sont en somme directe si et seulement si chacun a une intersection triviale avec la somme des autres.

4.2.4 Module quotient

Proposition 4.2.9. *Soit N un sous-module d'un A-module M, alors l'opération externe induit sur le groupe abélien quotient M/N une structure de A-module.*

Proposition 4.2.10 (Factorisation d'un morphisme d'anneau)**.** *Soit $f : M \to M'$ une application linéaire, N un sous-module de M, $p : M \to M/N$ la projection* canonique. *L'application linéaire f factorise par le quotient M/N si et seulement si $N \subset \mathrm{Ker}(f)$. Le morphisme g a même image que f et est injectif si et seulement si $N = \mathrm{Ker}(f)$.*

Corollaire 4.2.11 (Premier théorème d'isomorphisme)**.** *Soit $f : M \to N$ une application linéaire, alors le quotient $M/\mathrm{Ker}(f)$ est isomorphe à l'image de f.*

Exercice 4.2.12 (Second théorème d'isomorphisme)*.* Soient N et P deux sous-module de M. Démontrer que : $(N + P)/P$ est isomorphe à $N/N \cap P$.

Exercice 4.2.13 (Troisième théorème d'isomorphisme). Soient $P \subset N$ deux sous-modules de M. Démontrer que l'inclusion de N dans M induit une identification de N/P avec un sous-module de M/P, et que : M/N est isomorphe à $(M/P)/(N/P)$.

4.3 Modules de type fini

Définition 4.3.1. Un A-module est de type fini si et seulement s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

Remarque 4.3.2. La condition équivaut à l'existence d'une application linéaire surjective $f : A^n \to M$, c'est à dire à l'existence d'un isomorphisme avec un quotient de A^n.

Lemme 4.3.3. *Soit N est un sous-module de type fini d'un A-module M. Si le quotient M/N est de type fini, alors M est de type fini.*

Théorème 4.3.4. *Sur un anneau noethérien, tout sous-module d'un module de type fini est de type fini.*

Fin du cours du 23 octobre

Théorème 4.3.5 (Hilbert)**.** *Si l'anneau A est noethérien, alors $A[X]$ et plus généralement $A[X_1, \ldots, X_n]$ sont des anneaux noethériens.*

Définition 4.3.6. Une A-algèbre est de type fini si et seulement si elle est isomorphe à un quotient d'une algèbre $A[X_1, \ldots, X_n]$.

Proposition 4.3.7. *Une algèbre de type fini sur un anneau noethérien est un anneau noethérien.*

Proposition 4.3.8. *Un quotient d'un anneau noethérien est noethérien.*

4.4 Modules libres, modules de torsion

Théorème 4.4.1. *Soit M un module libre sur un anneau commutatif qui admet une base finie de cardinal n, alors toutes les bases ont le même cardinal, qu'on appelle le rang de M.*

Définition 4.4.2. a) Un élément v d'un A-module M est de torsion si et seulement s'il existe $a \in A - \{0\}$ tel que $a.v = 0$.
b) Un module est de torsion si et seulement si tous ses éléments sont de torsion.

Exemples 4.4.3. 1. Dans un groupe abélien les éléments de torsion sont ceux d'ordre fini.
2. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de torsion.

Proposition 4.4.4. *Soit M un module sur un anneau commutatif A. L'ensemble de ses éléments de torsion forme un sous-module (de torsion)* $\mathrm{Tors}(M)$.

Théorème 4.4.5. *Soit M un module libre de rang fini n sur un anneau commutatif intègre A, et N un sous-module libre.*
a) Le rang de N est inférieur ou égal à n.
b) Il existe un sous-module libre P tel que :

$$N \cap P = \{0\} \text{ et } \mathrm{rg}(N) + \mathrm{rg}(P) = n \ .$$

c) Le rang de N est égal à n si et seulement si M/N est de torsion.

Module de fractions

Soient S une partie multiplicative d'un anneau commutati intègre A, et M un A-module. On définit $S^{-1}M$ comme le quotient de $S \times M$ par la relation d'équivalence :

$$(s, v) \sim (s', v') \Leftrightarrow sv' = vs' \ .$$

On note $\frac{v}{s}$ la classe de (s, v).

Proposition 4.4.6. *$S^{-1}M$ est un $S^{-1}A$-module, et l'application*

$$\begin{array}{rccc} j: & M & \to & S^{-1}M \\ & v & \mapsto & \frac{v}{1} \end{array}$$

est A-linéaire.

Remarque 4.4.7. L'application j précédente n'est en général pas injective

Proposition 4.4.8 (Propriété universelle)**.** *Pour tout $S^{-1}A$-module N et toute application A-linéaire $f : M \to N$, il existe une unique extension $S^{-1}A$-linéaire :*

$$F : S^{-1}M \to N .$$

Exercice 4.4.9. Soit A un anneau commutatif intègre.

1. Montrer qu'étant donnée une famille M_i, $i \in I$, de A-modules, on a un isomorphisme canonique :

$$S^{-1}\big(\bigoplus_{i\in I} M_i\big) \to \bigoplus_{i\in I} S^{-1}M_i .$$

2. Montrer que si N est un sous-module du A-module M, $S^{-1}N$ s'identifie à un sous-module de $S^{-1}M$, et on a un isomorphisme canonique entre $S^{-1}(M/N)$ et $S^{-1}M/S^{-1}N$.

Dans le cas où S est égal à $A - \{0\}$, on obtient un espace vectoriel sur le corps des fractions $\mathcal{Q}(A)$. On utilisera la notation $\mathcal{Q}(M)$ pour l'espace vectoriel $(A - \{0\})^{-1}M$.

Proposition 4.4.10. *Un module M sur un anneau commutatif intègre A est de torsion si et seulement si $\mathcal{Q}(M)$ est trivial.*

Fin du cours du 26 octobre