Chapitre 5

Modules de type fini sur les anneaux principaux

5.1 Modules libres de rang fini

Théorème 5.1.1. *Tout sous-module d'un module libre de rang fini sur un anneau principal est libre.*

Théorème 5.1.2. *Si un module de type fini sur un anneau principal est sans torsion, alors il est libre.*

5.2 Résultats de structure

Théorème 5.2.1. *Soit M un module de type fini sur un anneau principal, alors il existe un module libre L tel que M est isomorphe à $L \oplus \mathrm{Tors}(M)$.*

Structure des modules de torsion

Définition 5.2.2. a) Soient M un module sur un anneau principal A, et p un élément irréductible de A. Un élément v de M est p-primaire si et seulement s'il est annulé par une puissance de p :

$$\exists \alpha \in \mathbb{N}\ p^{\alpha}.v = 0\ .$$

b) Les éléments p-primaires de M forment un sous-module : le sous-module M_p des éléments p-primaires.
c) Les sous-modules M_p non triviaux sont les composantes primaires de M.

Remarque 5.2.3. Lorsque p et q sont associés, les sous-modules M_p et M_q sont les mêmes.

Proposition 5.2.4. *a) Un module de torsion de type fini a un nombre fini de composantes primaires (non triviales).*
b) Un module de torsion de type fini est somme directe de ses composantes primaires.

Remarque 5.2.5. Deux modules de torsion de type fini sont isomorphes si et seulement si leurs composantes primaires sont isomorphes.

Structure des modules primaires

Théorème 5.2.6. *Soit A un anneau principal et M un A-module de type fini p-primaire. Il existe une unique suite décroissante d'entiers : $\alpha_1 \geq \alpha_2 \cdots \geq \alpha_n > 0$ telle que M est isomorphe à :*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A/(p^{\alpha_i}) \ .$$

Classification des modules de type fini de torsion

Théorème 5.2.7. *Soit M un module de torsion de type fini sur un anneau principal, alors il existe une suite d'éléments de A décroissante pour la divisibilité : $a_n | a_{n-1} \dots | a_0$, unique modulo produit par des inversibles, telle que M est isomorphe à :*

$$\bigoplus_{i=1}^{n} A/(a_i) \ .$$

Remarque 5.2.8. Les $\mathbb{Z}$-modules de torsion de type fini sont les groupes abéliens finis.

5.3 Invariants de similitude d'un endomorphisme

Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie, et f un endomorphisme de E. Une structure de $\mathbb{K}[X]$ module est définie sur E, avec l'opération externe :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] \times E & \to & E \\ (P, v) & \mapsto & P.v = P(f)(v) \end{array}$$

Le $\mathbb{K}[X]$-module E est de torsion, et sa classe d'isomorphisme est caractérisée par ses facteurs invariants : une suite de polynômes unitaires, décroissante pour la division : $(P_1, \dots, P_m)$. Le polynôme P_1 est le polynôme minimal.

La matrice compagne d'un polynôme unitaire

$$P = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1} X^{n-1} + X^n$$

est :

$$C(P) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & -a_1 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & -a_2 \\ 0 & 0 & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 & -a_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & -a_{n-1} \end{pmatrix}$$

Théorème 5.3.1. *L'endomorphisme f admet la suite de facteurs invariants $(P_1, \dots, P_m)$ si et seulement s'il existe une base de E dans laquelle la matrice est diagonale par blocs, avec les matrices compagnes des P_i comme blocs diagonaux.*

Corollaire 5.3.2. *Deux endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie sont conjugués si et seulement s'ils ont les mêmes facteurs invariants.*

Exercice 5.3.3. Dans le cas où le polynôme minimal est produit de facteurs de degré 1 (scindé), retrouver la forme de Jordan classique.

5.4 Classification des sous-modules d'un module libre

Théorème 5.4.1. *Soient M un module libre de rang n sur un anneau principal A, et N un sous-module de rang m.*
a) Il existe une suite $(a_1, \dots, a_m)$ de A décroissante pour la division, et une base $B = (b_1, \dots, b_n)$ de M telles que : $(a_1 b_1, \dots, a_m b_m)$ est une base de N.
b) La suite $(a_1, \dots, a_m)$ est unique et caractérise la classe d'isomorphisme du sous-module N : deux sous-modules N et N' se correspondent par un isomorphisme de M si et seulement si leurs suites invariantes sont les mêmes.

Point de vue algorithmique : forme normale de Smith

Etant donné une base de N et une base de M, on considère la matrice associée à l'inclusion de N dans M. Les transformations élémentaires sur les lignes et les colonnes correspondent à des changements de bases respectivement dans M et dans N.

Pour échelonner on améliore la méthode de Gauss. Lorsque le pivot choisi ne permet pas de diviser dans l'anneau, on résout le problème avec une transformation sur deux lignes associée à une relation de Bezout $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$:

$$L_i \leftarrow \alpha L_i + \gamma L_j \ , \ L_j \leftarrow \beta L_i + \delta L_j .$$

On pourra utiliser la même transformation sur les colonnes pour achever la diagonalisation, puis pour trouver des coefficients diagonaux ordonnés par la division.

sage Notebook
Version 3.2.2

admin | Toggle | Home | Published | Log | Settings | Report a Problem | Help | Sign out

Untitled
last edited on November 26, 2009 03:00 PM by admin

Save | Save & quit | Discard & quit

File... | Action... | Data... | sage

Print | Worksheet | Edit | Text | Undo | Share | Publish

Typeset

```
A = matrix(ZZ, 4, [3,0,5,-6,0,-3,8,1,4,5,5,6,2,2,8,9])
```

```
A
```

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 5 & -6 \\ 0 & -3 & 8 & 1 \\ 4 & 5 & 5 & 6 \\ 2 & 2 & 8 & 9 \end{pmatrix}$$

```
[C,D,E]=A.smith_form()
```

```
C,D,E
```

$$\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 0 \\ 5 & -4 & 3 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 13 & -34 & -33 & -120 \\ -10 & 26 & 25 & 91 \\ -4 & 11 & 11 & 41 \\ 3 & -8 & -8 & -30 \end{pmatrix} \right)$$

```
D*A*E
```

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}$$

evaluate