Examen de Mathématiques
Lundi 14 juin 2010

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices **A**, **B**, **C** et **D** peuvent être traités indépendamment. Les résumés du cours de C. Blanchet et une page recto-verso de notes manuscrites sont seuls autorisés.
Une réponse ne vaut que si elle est démontrée par un argument explicite et juste. Le barème est donné à titre indicatif.

A– (4 points) Soit M le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Z}/24\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/27\mathbb{Z}$.

1. Quelles sont les composantes primaires de M ?
2. Quels sont les facteurs invariants de M ?
3. Est-ce que M est isomorphe
   (a) à $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/72\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/108\mathbb{Z}$?
   (b) à $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/36\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/54\mathbb{Z}$?

B– (5 points) Pour $n \geq 0$, soient $\zeta_{2^{n+2}} = e^{\frac{i\pi}{2^{n+1}}}$, $\alpha_n = \zeta_{2^{n+2}} + \zeta_{2^{n+2}}^{-1}$, $K_n = \mathbb{Q}(\zeta_{2^{n+2}})$, $F_n = \mathbb{Q}(\alpha_n)$.

1. Montrer que : $[K_n : \mathbb{Q}] = 2^{n+1}$.
2. Montrer que l'extension $(K_n : F_n)$ est quadratique. Préciser le polynôme minimal de $\zeta_{2^{n+2}}$ sur F_n.
3. Calculer $[F_n : \mathbb{Q}]$ et $[F_{n+1} : F_n]$.
4. Montrer que α_n est constructible, c'est-à-dire que F_n est obtenu à partir de $\mathbb{Q}$ par une suite d'extensions quadratiques. Donner une formule explicite avec radicaux pour α_n.

C– (5 points) Soient $\alpha = 2 + \sqrt{2}$, $\beta = \sqrt{\alpha}$, $K = \mathbb{Q}(\alpha)$ et $L = \mathbb{Q}(\beta)$.

1. Montrer que l'extension $(K : \mathbb{Q})$ est galoisienne et calculer son groupe de Galois.
2. Montrer que pour chaque $\sigma \in \mathrm{Gal}(K : \mathbb{Q}) - \{Id\}$, l'élément $\sigma(\alpha)/\alpha$ est un carré dans K, qu'on précisera.
3. Montrer que l'extension $(L : K)$ est de degré 2. Préciser le générateur τ du groupe $\mathrm{Gal}(L : K)$.
4. Montrer que l'extension $(L : \mathbb{Q})$ est galoisienne et décrire son groupe de Galois (ses éléments et la loi de groupe).

TSVP

D– (6 points) Soient p un nombre premier, $\zeta_p = e^{\frac{i2\pi}{p}}$, $\phi_p = 1 + X + \cdots + X^{p-1}$, $K = \mathbb{Q}(\zeta_p)$, $A = \mathbb{Z}[\zeta_p]$.

1. Montrer que l'anneau A est isomorphe à $\mathbb{Z}[X]/(\phi_p)$.
2. (a) Soit a et b deux entiers strictement positifs de PGCD égal à d. Démontrer qu'il existe des polynômes U et V dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que $U(X^a - 1)) + V(X^b - 1) = X^d - 1$.

   (b) En déduire que pour $2 \leq k < p$, $1 + \zeta_p + \cdots + \zeta_p^{k-1}$ est inversible dans A.
3. Factoriser ϕ_p dans $A[X]$. Déduire que dans l'anneau A, $1 - \zeta_p$ divise p.
4. (a) Montrer qu'il existe un unique morphisme d'anneau $T : A \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   (b) Montrer que T induit un isomorphisme entre $A/(1 - \zeta_p)$ et $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

   (c) En déduire que $1 - \zeta_p$ est premier dans A.
5. Montrer que pour $2 \leq k < p$, $1 - \zeta_p$ et $1 - \zeta_p^k$ sont associés dans A. Déduire que p et $(1 - \zeta_p)^{p-1}$ sont associés dans A.