Université Paris 7 - Denis Diderot **M1 Maths - 2009**

Examen partiel d'algèbre

6 novembre 2009

L'épreuve dure 3 heures. Les trois exercices sont indépendants.
Une réponse ne vaut que si elle est justifiée par un argument complet et explicite. Les documents, les calculettes et les téléphones ne sont pas autorisés.

Exercice I.

1. Déterminer pour chacun des anneaux qui suivent le groupe des éléments inversibles.
   (a) L'anneau quotient $\mathbb{R}[X]/(X^5)$.
   (b) L'anneau de fractions $\mathbb{Z}_{(5)} = S^{-1}\mathbb{Z}$, où S est la partie multiplicative $\mathbb{Z} \setminus 5\mathbb{Z}$.
2. On dit qu'un anneau R est local s'il possède un unique idéal maximal.
   (a) Montrer qu'un anneau est local si, et seulement si, le sous-ensemble de ses élements non inversibles est un idéal.
   (b) Montrer que les deux anneaux de la question précédente sont des anneaux locaux.

Exercice II. On étudie dans cet exercice l'idéal $I = (7, X^4 + 1)$ de $\mathbb{Z}[X]$ et l'anneau quotient $R = \mathbb{Z}[X]/I$.

a) Montrer que le polynôme $X^4 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

b) Montrer qu'il cesse de l'être dans $\mathbb{F}_7[X]$ et donner sa décomposition en produit d'irréductibles.

c) Quels sont les idéaux de $\mathbb{Z}[X]$ qui contiennent I ?

d) Montrer que R est isomorphe à l'anneau $\mathbb{F}_7[X]/(X^4 + 1)$.

e) Trouver le cardinal du groupe $R^\times$.

Exercice III. Soit A le sos-groupe additif de $\mathbb{C}$ engendré par les deux racines, notées j et $\overline{j}$, de $X^2 + X + 1$, et soit B le sous-groupe $\mathbb{Z} + \mathbb{Z}i\sqrt{3}$.

1. (a) Montrer que A est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.
   (b) Montrer que $N(z) = |z|^2$ définit une application de A dans $\mathbb{N}$ qui respecte la multiplication. On admet que N est un stathme euclidien sur A.
   (c) Quel est l'ensemble $A^\times$ des éléments inversibles de A ?

2. (a) Montrer que B est un sous-anneau de A et qu'il n'est pas factoriel.
   (b) Montrer que les corps de fractions $\mathcal{Q}(B)$ et $\mathcal{Q}(A)$ sont isomorphes.

3. (a) Montrer que 1 et j engendrent A comme B-module.
   (b) Quels sont les éléments de torsion du B-module A ?
   (c) Est-ce que A est un B-module libre ?
   (d) Déterminer le module quotient A/B.

4. Montrer que tout élément irréductible de A est associé à un élément de B. Décomposer $56 + 14i\sqrt{3}$ en produit d'éléments irréductibles appartenant à B.

5. Trouver un p.g.c.d. appartenant à B de $19 + 38i\sqrt{3}$ et $8 + 3i\sqrt{3}$.

6. Montrer que le polynôme $X^5 + 14X + 2 + i\sqrt{3}$ est irréductible sur le corps des fractions de A.