

# Chapitre 1

## Introduction à la théorie des nœuds

### 1.1 Nœuds et diagrammes

**Définition 1.1.1.** Un nœud  $K$  dans  $\mathbb{R}^3$  est une sous-variété difféomorphe au cercle.

*Remarque 1.1.2.* Par défaut on considérera des nœuds lisses (de classe  $C^\infty$ ). On pourrait également considérer des nœuds linéaires par morceau.

*Exemple 1.1.3.* Le nœud trivial :  $S^1 \subset \mathbb{C} \subset \mathbb{C} \times \mathbb{R} \cong \mathbb{R}^3$ .

*Exemple 1.1.4.* La sphère unité de  $\mathbb{C}^2$  est notée  $S^3$ . On utilisera la projection stéréographique  $s : S^3 \setminus \{(0, i)\} \cong \mathbb{R}^3$ . Pour  $p$  et  $q$  premiers entre eux le nœud torique  $K_{p,q}$  est l'image du plongement :

$$\begin{aligned} \gamma_{p,q} : S^1 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ z &\mapsto s\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(z^p, z^q)\right) \end{aligned}$$

*Exercice 1.1.5.* Calculer un paramétrage du nœud  $K_{p,q}$ . Dessiner la projection sur le premier plan de coordonnées de  $K_{2,3}$  et  $K_{3,2}$ .

**Définition 1.1.6.** Un entrelacs  $L$  à  $n$  composantes dans  $\mathbb{R}^3$  est une sous-variété difféomorphe à l'union disjointe de  $n$  cercles.

**Définition 1.1.7.** Une isotopie (ambiante lisse) entre les deux nœuds  $K$  et  $K'$  dans  $\mathbb{R}^3$  est une application différentiable (de classe  $C^\infty$ )

$$\begin{aligned} h : [0, 1] \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \mathbb{R}^3 \\ (t, x) &\mapsto h(t, x) = h_t(x) \end{aligned}$$

telle que :  $h_0 = Id_{\mathbb{R}^3}$ ,  $h_1(K) = K'$ , pour tout  $t$ ,  $h_t$  est un difféomorphisme.

Les deux nœuds  $K$  et  $K'$  sont isotopes si et seulement s'il existe une isotopie entre eux. Si les nœuds  $K$  et  $K'$  sont orientés, on demande de plus que  $h_1$  respecte les orientations.

*Remarque 1.1.8.* La même définition vaut pour les entrelacs. Il convient de préciser si les composantes sont ordonnées ou non.

Le problème fondamental en théorie des nœuds est la classification à isotopie près. On obtient une classification a priori plus fine si on prend en compte l'orientation.

**Définition 1.1.9.** Un nœud est inversible si et seulement s'il est isotope au nœud muni de l'orientation opposée.

Il existe des nœuds non inversibles. Il est difficile de trouver des invariants qui les détectent.

**Définition 1.1.10.** Le miroir d'un nœud  $K$  est l'image de  $K$  par la réflexion  $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ . Un nœud orienté est positivement (resp. négativement) amphichéral si et seulement s'il est isotope à son miroir (resp. à l'inverse de son miroir).

**Définition 1.1.11.** Un diagramme de nœud est une immersion générique d'un cercle dans le plan orienté  $\mathbb{R}^2$ , avec une information *dessus-dessous* en chaque point double. Ici générique signifie que les éventuels points multiples sont des points doubles à tangentes distinctes.

A chaque diagramme on associe une classe d'isotopie de nœud dans  $\mathbb{R}^3$  : on considère d'abord la courbe immergée dans  $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ , puis on *résout les points doubles* en déplaçant un segment de l'arc de dessous au niveau  $z = -\epsilon < 0$ , et les points voisins à des niveaux intermédiaires.

Ce qui précède s'étend naturellement aux entrelacs.

**Théorème 1.1.12.** *Tout nœud (resp. entrelacs) est isotope à un nœud dont la projection sur le premier plan de coordonnées est une courbe immergée générique.*

*Remarque 1.1.13.* L'isotopie  $h$  obtenue est *petite* : on peut demander que pour tout  $t$ ,  $h_t$  coïncide avec l'identité en dehors d'un voisinage arbitraire du nœud.

**Théorème 1.1.14** (Reidemeister). *Deux diagrammes définissent des nœuds (resp. des entrelacs), isotopes si et seulement s'ils se correspondent par un suite d'isotopies planes et de mouvements de Reidemeister décrits dans la figure 1.1.*

*Remarque 1.1.15.* Dans le cas orienté il y a lieu de considérer chaque mouvement de Reidemeister avec les différentes orientations.

Ce théorème permet de définir des invariants d'isotopie à partir de fonctions sur les diagrammes. Un premier exemple est l'enlacement de deux composantes orientées  $K$  et  $K'$ . A chaque croisement d'un diagramme on attribue un signe  $\pm 1$  selon la règle indiquée sur la figure 1.2.

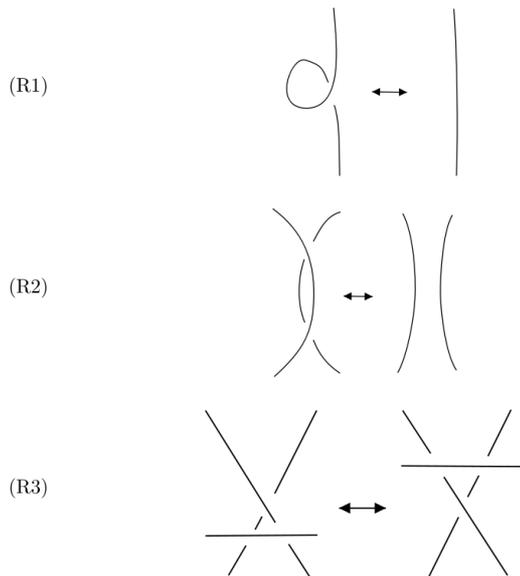


FIGURE 1.1 – Mouvements de Reidemeister

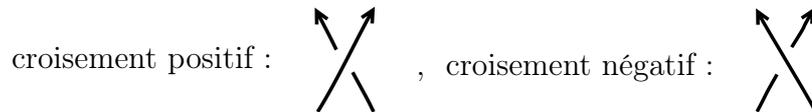


FIGURE 1.2 – Signe d'un croisement

**Proposition 1.1.16.** *Soit  $(K, K')$  un entrelacs orienté à deux composantes, représenté par un diagramme  $(D, D')$ , alors la demi-somme des signes des croisements (mixtes) entre  $D$  et  $D'$  est un entier invariant par mouvement de Reidemeister, et donc ne dépend que de la classe d'isotopie orientée de  $(K, K')$ .*

**Définition 1.1.17.** On appelle enlacement de  $K$  et  $K'$  l'invariant de la proposition précédente.

## 1.2 Le groupe du nœud

On identifie la sphère  $S^3 \subset \mathbb{C} \times \mathbb{C}$  au compactifié d'Alexandroff de  $\mathbb{R}^3$  via la projection stéréographique de pôle  $(0, i)$ , et on considérera désormais les nœuds dans  $S^3$ .

**Proposition 1.2.1.** *a) Tout nœud dans  $S^3 \cong \widehat{\mathbb{R}^3}$  est isotope à un nœud dans  $\mathbb{R}^3$ .  
b) Deux nœuds dans  $\mathbb{R}^3$  sont isotopes dans  $\mathbb{R}^3$  si et seulement s'il le sont dans  $\widehat{\mathbb{R}^3} \cong S^3$ .*

Pour un nœud  $K$  dans  $S^3 \cong \widehat{\mathbb{R}^3} = \mathbb{R}^3 \cup \{\infty\}$ , on note :  $X_K = S^3 \setminus K$  son complément. On suppose que  $K$  évite le point  $\infty$ , qu'on prend comme point de base.

**Définition 1.2.2.** Le groupe du nœud est le groupe fondamental du complément du nœud :  $\pi_1(X_K, \infty)$ .

Le groupe fondamental du nœud ne dépend pas de l'orientation, mais l'orientation est utile pour préciser des générateurs.

Etant donné un diagramme orienté, on associe à chaque arc un élément du groupe fondamental représenté par un méridien qui enlace positivement, relié au point de base par un chemin vertical dans le demi-espace positif.

**Théorème 1.2.3** (Présentation de Wirtinger). *Le groupe fondamental d'un nœud (ou d'un entrelacs) associé à un diagramme  $D$  à  $m$  croisements et  $m$  arcs (on a enlevé les petits segments qui passe dessous) admet une présentation avec comme générateurs un lacet méridien pour chaque arc, et une relation pour chaque croisement, de la forme  $ab = ca$  ( $a$  est le lacet correspondant à l'arc supérieur, la relation précise tient compte des orientations).*

La preuve repose sur le théorème de Van Kampen; le cas particulier ci-dessous est suffisant. Pour la preuve d'un énoncé général, on pourra consulter *Topology and geometry*, Glen E. Bredon, chapitre III.

**Théorème 1.2.4.** *Soit  $X = U_1 \cup U_2$  un recouvrement ouvert de l'espace topologique  $X$ , avec  $U_1, U_2$  et  $U_1 \cap U_2$  connexes par arcs,  $x_0 \in U_1 \cap U_2$ . On note les inclusions :  $i : U_1 \cap U_2 \rightarrow U_1, j : U_1 \rightarrow X$ . Si  $U_2$  est simplement connexe, alors l'application*

$$j_{\#} : \pi_1(U_1, x_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0)$$

*induit un isomorphisme :*

$$\frac{\pi_1(U_1, x_0)}{i_{\#}(\pi_1(U_1 \cap U_2, x_0))^N} \cong \pi_1(X, x_0)$$

*Exercice 1.2.5.* Donner une présentation du nœud de trèfle (nœud torique  $K_{3,2}$ ) et montrer qu'il existe un morphisme surjectif du groupe fondamental sur le groupe symétrique  $\mathcal{S}_3$ .

*Exercice 1.2.6.* Montrer que les deux nœuds représentés dans la figure 1.3 (nœud carré et nœud de mémé) ont des groupes fondamentaux isomorphes.

*Exercice 1.2.7.* Donner une présentation du groupe du nœud associé à un diagramme, avec un générateur pour chaque face bornée, représenté par un lacet vertical (générateurs de Dehn).



FIGURE 1.3 – Nœud carré et nœud de mémé

### 1.3 Le module d'Alexander

*Exercice 1.3.1.* Calculer  $H_*(X_K)$  pour un nœud  $K$ , et plus généralement  $H_*(X_L)$  pour un entrelacs  $L$  à  $n$  composantes.

**Définition 1.3.2.** On appelle revêtement cyclique infini du nœud  $K$  le revêtement régulier  $\widetilde{X}_K$  du complément du nœud  $K$ , associé au morphisme d'abélianisation :

$$h : \pi_1(X_K, \infty) \rightarrow H_1(X_K, \mathbb{Z}) .$$

Notons  $\Omega(X_K, \infty, x)$  l'espace des chemins de  $\infty$  à  $x$  dans  $X_K$ . On peut définir  $\widetilde{X}_K$  comme le quotient de

$$\{(x, \gamma), x \in X_K, \gamma \in \Omega(X_K, \infty, x)\}$$

par la relation :

$$(x, \gamma) \sim (x', \gamma') \Leftrightarrow x = x' \text{ et } h(\gamma'\gamma^{-1}) = 0.$$

*Exercice 1.3.3.* Définir une topologie convenable sur le quotient précédent et montrer qu'on obtient ainsi un revêtement régulier de  $X_K$  de groupe  $H_1(X_K, \mathbb{Z})$ .

Une orientation du nœud  $K$  permet de choisir un générateur de  $H_1(X_K, \mathbb{Z})$ , représenté par un méridien qui enlace  $K$  positivement. On identifie alors  $H_1(X_K, \mathbb{Z})$  avec le groupe multiplicatif  $G = \{t^n, n \in \mathbb{Z}\}$ . Le groupe  $G$  agit sur le revêtement  $\widetilde{X}_K$ . Cette action s'étend en une action de l'anneau  $\mathbb{Z}[G] = \mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  sur le complexe singulier  $C_*(\widetilde{X}_K)$ , et cette action commute avec le bord. L'homologie  $H_*(\widetilde{X}_K, \mathbb{Z})$  est donc un module sur  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ .

**Définition 1.3.4.** On appelle module d'Alexander du nœud  $K$  le  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$ -module  $H_1(\widetilde{X}_K, \mathbb{Z})$ .

*Remarque 1.3.5.* Le groupe  $H_1(\widetilde{X}_K, \mathbb{Z})$  ne dépend pas de l'orientation de  $K$ . L'action de  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  en dépend. Le changement d'orientation échange  $t$  et  $t^{-1}$ .

Etant donné un diagramme  $D$  d'un nœud orienté  $K$ , on associe à chaque face  $F$  du diagramme un lacet  $\gamma_F$ , pointé en  $\infty$ , dont l'image orientée est une droite verticale qui intersecte  $F$  positivement. On choisit un relevé  $\widetilde{\infty}$  du point de base dans  $\widetilde{X}_K$ . Chaque lacet  $\gamma_F$  se relève en un chemin d'origine  $\widetilde{\infty}$ , noté  $\widetilde{\gamma}_F$ . L'extrémité de ce chemin est un point :  $t^{I(F)}\widetilde{\infty}$ .

**Proposition 1.3.6.** *Pour chaque face  $F$ ,  $I(F)$  est l'enlacement de  $\gamma_F$  avec  $K$ .*

Si on fixe une face  $Z$ , avec  $I(Z) = \pm 1$  (on peut prendre une face adjacente à la face non bornée), alors pour chaque face  $F$ , on obtient un cycle  $c_F = \tilde{\gamma}_F - \frac{t^{I(F)} - 1}{t^{I(Z)} - 1} \tilde{\gamma}_Z$ , dont la classe est simplement notée  $F$ .

**Théorème 1.3.7.** *On obtient une présentation du module d'Alexander  $H_1(\tilde{X}_K, \mathbb{Z})$  comme  $\mathbb{Z}[t, t^{-1}]$  module, avec comme générateurs les faces bornées  $F$ ,  $F \neq Z$ , et pour chaque croisement décrit dans la figure 1.4 une relation :  $A - tB + tC - D = 0$ .*

$$\begin{array}{ccc}
 B & & A \\
 & -t & | \quad 1 \\
 \hline
 & t & | \quad -1 \\
 C & & D \\
 & & \downarrow
 \end{array}$$

FIGURE 1.4 – Relation d'Alexander

*Remarque 1.3.8.* Notons  $m$  le nombre de croisements. Le théorème précédent signifie que le module  $H_1(\tilde{X}_K)$  est isomorphe au conoyau d'une application linéaire représentée par une matrice dans laquelle les lignes correspondent aux faces bornées distinctes de  $Z$ , et les colonnes correspondent aux croisements. Pour chaque croisement décrit dans la figure 1.4, le vecteur colonne est  $A - tB + tC - D$ .

## 1.4 Annexe : Modules de présentation finie

**Définition 1.4.1.** Soit  $A$  un anneau commutatif. Un  $A$ -module  $M$  est de présentation finie s'il est isomorphe au conoyau d'une application linéaire :  $M \approx A^g / \text{Im}(P)$  avec  $P : A^r \rightarrow A^g$ . On dit que  $P$  est une (matrice de) présentation de  $M$ .

*Remarque 1.4.2.* Dans le cas noethérien tout module de type fini est de présentation finie.

**Théorème 1.4.3.** *Deux présentations d'un module de type fini sur un anneau commutatif sont reliées par une suite de transformations de l'un des types suivants :*

- (i) *Permutation des colonnes.*
- (ii) *Transformation élémentaire sur les lignes :  $L_i \leftarrow L_i + \alpha L_j$ , ou sur les colonnes :  $C_i \leftarrow C_i + \alpha C_j$ .*

(iii) Stabilisation :  $P \leftrightarrow \begin{pmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ .

(iv) Ajout d'une colonne nulle ou l'inverse.

Etant donné une matrice de présentation  $P$  de taille  $g \times r$  d'un module  $M$  ( $g$  est le nombre de générateurs et  $r$  est le nombre de relations), on note  $F_i(P)$  l'idéal engendré par les mineurs d'ordre  $g - i$  de  $P$ .

**Théorème 1.4.4.** Les idéaux  $F_i(P)$  ne dépendent pas du choix de la matrice de présentation du module  $M$ .

**Définition 1.4.5.** Pour un module  $M$  de présentation finie  $P$ , les modules  $F_i(P) = F_i(M)$  sont appelés idéaux de Fitting de  $M$ . L'idéal  $F_0(M)$  est appelé l'ordre de  $M$ .

Référence : Eisenbud, Commutative algebra, ch20.

*Remarque 1.4.6.* Si  $M$  admet une matrice de présentation carrée, alors l'ordre de  $M$  est un idéal principal.

## 1.5 Polynôme d'Alexander

Le module d'Alexander d'un noeud admet une présentation carrée. Une telle matrice est appelée matrice d'Alexander du noeud.

**Définition 1.5.1.** Le polynôme d'Alexander d'un noeud est un générateur de l'ordre du module d'Alexander. Il est égal modulo  $\pm t^{\pm k}$  au déterminant de la matrice de présentation du théorème 1.3.7.

*Remarque 1.5.2.* On utilisera la notation  $P \doteq Q$  pour une égalité modulo  $\pm t^{\pm k}$  de deux polynômes  $P, Q$  de  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ .

*Exercice 1.5.3.* Montrer que si deux diagrammes de noeud sont reliés par un mouvement de Reidemeister, alors les déterminants des matrices d'Alexander du théorème 1.3.7 sont égaux modulo  $\pm t^{\pm k}$ .

**Proposition 1.5.4.** Le polynôme d'Alexander  $\Delta_K(t)$  d'un noeud  $K$  satisfait les propriétés suivantes :

- a)  $\Delta_K(1) = \pm 1$  ;
- b) Symétrie :  $\Delta_K(t^{-1}) \doteq \Delta_K(t)$ .

*Exemple 1.5.5.* Pour le trèfle, on obtient  $t^2 - t + 1 \pmod{\pm t^{\pm k}}$ .

*Exercice 1.5.6.* Calculer le polynôme d'Alexander du noeud de huit.

*Exercice 1.5.7.* Calculer le polynôme d'Alexander des noeuds toriques  $K_{p,q}$ .

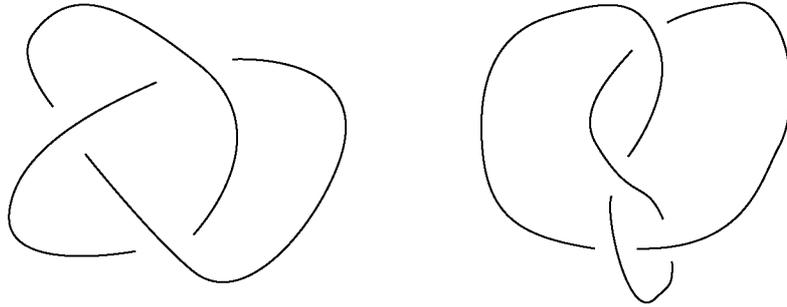


FIGURE 1.5 – Nœuds de trèfle et de huit

## 1.6 Surfaces de Seifert

**Définition 1.6.1.** Une surface de Seifert d'un nœud ou d'un entrelacs orienté  $L$  est une surface orientée plongée dans  $S^3$  de bord (orienté)  $L$ . Deux surfaces sont tube équivalentes si et seulement si on peut passer de l'une à l'autre en remplaçant deux disques par un tube en respectant l'orientation, ou bien l'inverse.

**Théorème 1.6.2.** *Tout entrelacs admet une surface de Seifert (resp. surface de Seifert connexe), et deux surfaces de Seifert (resp. surfaces de Seifert connexes) sont tube équivalentes.*

*Remarque 1.6.3.* Deux surfaces de Seifert connexes d'un même entrelacs se correspondent par des tube équivalences élémentaires qui restent dans les surfaces connexes.

L'algorithme de Seifert construit une surface de Seifert à partir d'un diagramme. Une preuve élémentaire du résultat de *tube équivalence* est donnée par Bar-Natan, Kauffman et Fulman <http://www.math.toronto.edu/drorbn/papers/tube/tube.ps>.

**Proposition 1.6.4.** *Soit  $\Sigma$  une surface de Seifert du nœud  $K$ , alors pour tout nœud  $K'$  transverse à  $\Sigma$  l'enlacement  $\text{lk}(K, K')$  est égal à l'intersection algébrique de  $\Sigma$  avec  $K'$ .*

*Remarque 1.6.5.* On peut écrire  $\text{lk}(K, K') = [\Sigma].[K']$ ; ici le point désigne l'intersection homologique  $H_2(S^3, K) \otimes H_1(X_{K'}) \approx H_2(S^3 - V_K, \partial(S^3 - V_K)) \otimes H_1(S^3 - V_{K'}) \rightarrow \mathbb{Z}$  où  $V_k$  est un voisinage tubulaire ouvert de  $K$ .

Etant donnés deux lacets  $a$  et  $b$  sur une surface de Seifert  $\Sigma$  (qui peuvent s'intersecter), on note  $\text{lk}(a, b^+)$  l'enlacement de  $a$  avec la courbe  $b^+$  translatée suivant un vecteur positivement normal à  $\Sigma$  dans un voisinage régulier de  $\Sigma$ .

**Proposition 1.6.6.** *L'enlacement  $\text{lk}(a, b^+)$  ne dépend que des classes d'homologie de  $a$  et  $b$ . Il s'étend en une forme bilinéaire bien définie  $S : H_1(\Sigma)^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{Z}$ .*

**Définition 1.6.7.** La forme bilinéaire  $S : H_1(\Sigma)^{\otimes 2} \rightarrow \mathbb{Z}$  est la forme de Seifert associée à la surface  $\Sigma$ .

**Théorème 1.6.8.** Si on fixe une base d'une surface de Seifert d'un nœud  $K$ , la matrice de  $tS - S^T$  est une matrice de présentation du module d'Alexander de  $K$ .

Le déterminant de la matrice précédente calcule le polynôme d'Alexander modulo  $\pm t^{\pm k}$ . Il est possible de lever l'ambiguïté.

**Définition 1.6.9.** Le polynôme de Conway d'un entrelacs  $L$ , avec surface de Seifert connexe  $\Sigma$  et forme de Seifert  $S$ , est défini par :

$$\nabla_L(x) = \det(xS - x^{-1}S^T) .$$

*Exercice 1.6.10.* 1. Montrer que  $\nabla_L(x)$  est bien défini.

2. Relation de Conway : Montrer que si trois entrelacs  $L_+$ ,  $L_-$ ,  $L_0$  ont des diagrammes identiques en dehors d'un disque où ils sont décrits dans la figure 1.6, alors leurs polynômes de Conway vérifie la relation :

$$\nabla_{L_+} - \nabla_{L_-} = (x^{-1} - x)\nabla_{L_0} .$$

3. Montrer que si l'entrelacs  $L$  a au moins deux composantes dont une est triviale, alors son polynôme de Conway est nul.

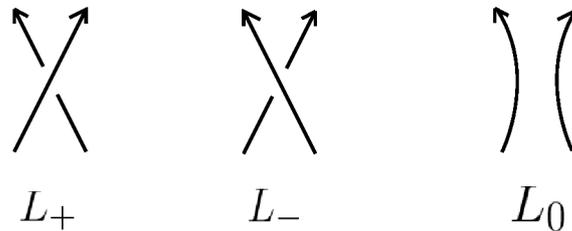


FIGURE 1.6 – Triplet de Conway

*Exercice 1.6.11.* Montrer que la signature et la dimension du noyau de la matrice symétrique  $S + S^T$  associée à une surface de Seifert connexe de l'entrelacs  $L$  sont des invariants de  $L$ .

**Définition 1.6.12.** La signature et la nullité d'un entrelacs  $L$  sont respectivement la signature et la dimension du noyau de la forme bilinéaire symétrique  $S + S^T$  associée à une surface de Seifert connexe de l'entrelacs  $L$ .