

Chapitre 2

Groupes de tresses

2.1 Plusieurs définitions équivalentes

2.1.1 Espaces de configuration

Définition 2.1.1. a) Le groupe des tresses pures à n brins est le groupe

$$P_n = \pi_1(\mathbb{C}^n - \Delta, *) ,$$

où Δ est la réunion des hyperplans $z_i = z_j$, $1 \leq i < j \leq n$.

b) Le groupe de tresses à n brins B_n est le groupe fondamental de l'espace des configurations non ordonnées de n points distincts du plan complexe, $\text{Conf}_n(\mathbb{C}) = (\mathbb{C}^n - \Delta)/\mathcal{S}_n$:

$$B_n = \pi_1(\text{Conf}_n(\mathbb{C}), *) .$$

Remarques 2.1.2. a) On peut se restreindre aux configurations de points dans le disque : $B_n \cong \pi_1(\text{Conf}_n(D^2), *)$.

b) Par défaut le point de base est une configuration sur l'axe réel : $\{1, 2, \dots, n\}$ ou $Q(n) = \{q_k = \frac{2k-n-1}{n}, 1 \leq k \leq n\}$.

c) L'espace des configurations $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$ s'identifie aux polynômes unitaires de degré n à coefficients dans $\mathbb{C}$ qui ont des racines distinctes. En particulier c'est une variété complexe.

2.1.2 Description diagrammatique

Si $\gamma : t \mapsto \gamma(t) = \{z_1(t), \dots, z_n(t)\}$ est un lacet dans $\text{Conf}_n(\mathbb{C})$, son graphe est un plongement de n intervalles dans $[0, 1] \times \mathbb{C}$, et à une homotopie du lacet correspond une isotopie horizontale du plongement. L'adjectif *horizontale* signifie que la première coordonnée (dans $[0, 1]$) ne change pas. On ne modifie pas la définition du groupe en considérant des lacets lisses et des homotopies lisses, ce que nous supposons désormais.

Pour pouvoir recoller, on suppose également que toutes les dérivées des z_i sont nulles en 0 et en 1.

Définition 2.1.3. Un lacet (lisse ...) représentant une tresse est en position régulière si et seulement si la projection de son graphe sur $[0, 1] \times \mathbb{R}$ est une immersion dont les points multiples sont des points doubles en position transverse obtenus pour des temps distincts.

Comme pour les noeuds : la projection régulière munie des informations dessus/dessous est un diagramme qui permet de reconstruire la tresse.

Théorème 2.1.4. *Toute tresse admet un représentant en position régulière, i.e. est représentable par un diagramme, et deux diagrammes définissent la même tresse si et seulement s'ils se correspondent par isotopie planaire ne modifiant pas l'ordre des croisements donné par le temps, mouvements de Reidemeister R2 et R3, et échange de temps entre deux croisements comme représenté dans la figure 2.1.*

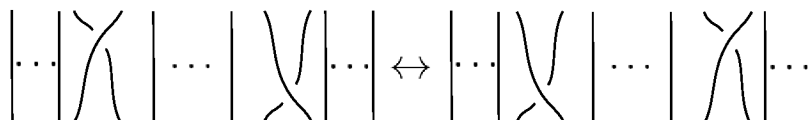


FIGURE 2.1 – Echange de deux croisements

Preuve : théorèmes de transversalité de Thom.

2.1.3 Présentation

On note σ_i la tresse représentée par un diagramme avec un seul croisement qui est un croisement positif entre les brins i et $i + 1$. Le théorème précédent se reformule :

Théorème 2.1.5. a) *Le groupe B_n est engendré par les σ_i , $1 \leq i < n$.*
b) *On obtient une présentation du groupe B_n avec les générateurs σ_i , $1 \leq i < n$, et les relations :*

$$\begin{aligned} \sigma_i \sigma_j &= \sigma_j \sigma_i, \text{ pour } |i - j| \geq 2, \\ \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i &= \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1}, \text{ pour } 1 \leq i \leq n - 2. \end{aligned}$$

Exercice 2.1.6. Montrer que le groupe B_n est engendré par deux éléments.

Exercice 2.1.7. 1. Montrer que $\theta_n = (\sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1})^n$ est dans le centre de B_n .

2. Quel est le centre de B_2 ? Montrer que θ_3 engendre le centre de B_3 .

Exercice 2.1.8. Montrer que l'application qui à σ_i associe la matrice $V_i \in GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ définie (par blocs) par :

$$V_i = \begin{pmatrix} I_{i-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-i-1} \end{pmatrix}$$

s'étend en un morphisme de groupe $\beta_n : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ (une représentation).

2.1.4 Difféomorphismes du disque

On note $Q(n)$ le point de base standard dans $\text{Conf}_n(D^2)$: $Q(n) = \{q_k = \frac{2k-1-n}{n}, 1 \leq k \leq n\}$. Le groupe $\text{Diff}(D^2, Q(n), S^1)$ est formé des difféomorphismes de D^2 qui fixent globalement $Q(n)$ et point par point un voisinage de S^1 . Pour $n = 0$, on obtient $\text{Diff}(D^2, \emptyset, S^1)$ noté simplement $\text{Diff}(D^2, S^1)$.

Exercice 2.1.9. Montrer que le sous-groupe $\text{Diff}_0(D^2, Q(n), S^1)$ formé des difféomorphismes isotopes à l'identité forment un sous-groupe distingué.

Définition 2.1.10. Le groupe des difféotopies du disque avec n points est le groupe :

$$\mathcal{M}(D_n^2) = \text{Diff}(D^2, Q(n), S^1) / \text{Diff}_0(D^2, Q(n), S^1) .$$

Théorème 2.1.11 (Smale). *Le groupe $\text{Diff}(D^2, S^1)$ est contractile.*

Corollaire 2.1.12. *Le groupe $\mathcal{M}(D^2) = \mathcal{M}(D_0^2)$ est trivial.*

Corollaire 2.1.13. *Si $f \in \text{Diff}(D^2, Q(n), S^1)$ fixe les segments $a_0 = [-1, q_1]$ et $a_k = [q_k, q_{k+1}]$ ($1 \leq k < n$) alors f représente l'identité dans $\mathcal{M}(D_n^2)$.*

Soit $t \in \text{Diff}(D^2, X(2), S^1)$ le difféomorphisme défini par :

$$t(re^{i2\pi\theta}) = re^{i2\pi(\theta + \alpha(r))} ,$$

où $\alpha : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ est une fonction différentiable qui vaut 0 sur un voisinage de 1, et $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$.

Remarque 2.1.14. La classe d'isotopie de t dans $\text{Diff}(D^2, Q(2), S^1)$ ne dépend pas du choix de α .

Pour $1 \leq k \leq n$, soit $t_k \in \mathcal{M}(D_n^2)$ la classe d'isotopie du difféomorphisme qui est égal à l'identité en dehors du disque de rayon $\frac{2}{n}$ centré en $\frac{x_k + x_{k+1}}{2}$ et qui est défini par t (via la carte $[v \rightarrow \frac{n}{2}(v - \frac{x_k + x_{k+1}}{2})]$). Les t_k sont appelés des demi-twists.

Proposition 2.1.15. *Les demi-twists t_k vérifient les relations de tresse :*

$$\begin{aligned} t_k t_l &= t_l t_k \text{ pour } |k - l| \geq 2, \\ t_k t_{k+1} t_k &= t_{k+1} t_k t_{k+1}, \text{ pour } 1 \leq k \leq n - 2. \end{aligned}$$

Théorème 2.1.16. *L'application qui aux générateurs σ_k , $1 \leq k \leq n$, de B_n associe respectivement les demi-twists t_k s'étend en un isomorphisme $B_n \cong \mathcal{M}(D_n^2)$.*

Pour construire l'isomorphisme inverse, on utilise le théorème de Smale. Une isotopie $h : [0, 1] \times D_n^2 \rightarrow D_n^2$, notée $(h_s)_{s \in [0, 1]}$ entre deux (représentants d') éléments de $\mathcal{M}(D_0^2)$ définit la tresse : $s \mapsto h_s(Q(n))$, et celle-ci ne dépend pas des choix. On définit $\Psi : \mathcal{M}(D_n^2) \rightarrow \mathcal{M}(D_n^2)$ en associant à $f \in \mathcal{M}(D_n^2)$ la tresse $\Psi(f)$ correspondant à une isotopie h , avec $h_0 = f$ et $h_1 = Id$.¹

2.1.5 Représentation d'Artin

Le groupe $\mathcal{M}(D_n^2)$ agit sur le groupe fondamental $\pi_1(D^2 - Q(n), * = -i) = F_n = F(x_1, \dots, x_n)$. Ici on a mis le point de base en $-i$, et x_k est représenté par un lacet direct autour du point q_k . Cette action est donnée sur les générateurs par :

$$\begin{aligned} (t_k)_\#(x_k) &= x_{k+1} \\ (t_k)_\#(x_{k+1}) &= x_{k+1} x_k x_{k+1}^{-1} \\ (t_k)_\#(x_j) &= x_j \quad \text{si } j \notin \{k, k+1\} \end{aligned}$$

Remarque 2.1.17. Notons qu'ici un lacet noté ab est formé de a suivi de b . Si on adopte la convention inverse, la conjugaison ci-dessus est modifiée en correspondance.

Théorème 2.1.18. *L'action de $\mathcal{M}(D_n^2)$ sur $\pi_1(D^2 - X(n), * = -i) = F_n$ induit un morphisme injectif :*

$$B_n \cong \mathcal{M}(D_n^2) \rightarrow \text{Aut}(F_n),$$

dont l'image est le groupe B'_n des automorphismes ϕ pour lesquels :

$$\phi(x_n) \dots \phi(x_2) \phi(x_1) = x_n \dots x_2 x_1,$$

$$\exists \mu \in \mathcal{S}_n, \forall k \exists A_k \in F_n, \phi(x_k) = A_k x_{\mu(k)} A_k^{-1}.$$

La preuve va utiliser la structure des groupes de tresses pures.

1. Dans ce sens là pour que $\Psi(g \circ f) = \Psi(g) \Psi(f)$: si $h' = (h'_s)$ est une isotopie de g à Id et $h = (h_s)$ est une isotopie de f à Id , on obtient une isotopie de $g \circ f$ à Id en faisant $(h'_s \circ f)$ suivie de h .

2.2 Structure du groupe des tresses pures

L'oubli du dernier point de la configuration (du dernier brin du graphe) induit un morphisme $f_n : P_n \rightarrow P_{n-1}$. Le noyau de f_n s'identifie au groupe fondamental $U_{n-1} = \pi_1(D^2 - \{q_1, \dots, q_{n-1}\}, q_n)$ qui est un groupe libre à $n - 1$ générateurs $A_{1,n}, \dots, A_{n-1,n}$, où A_j est représenté par un lacet direct autour du point x_j , relié au point de base par un lacet situé dans le demi-disque $\text{Im}(z) \geq 0$ (diagramme 2.2). Pour $2 \leq k < n$,

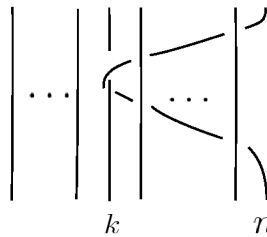


FIGURE 2.2 – La tresse pure $A_{k,n}$

les inclusions $P_k \rightarrow P_n$ permettent de définir les éléments $A_{1,k}, \dots, A_{k-1,k}$ dans P_n .

Proposition 2.2.1. *Soit $n \geq 2$.*

- a) Le groupe P_n est isomorphe au produit semi-direct du groupe libre U_{n-1} avec P_{n-1} .
 b) Pour $n \geq 2$, toute tresse pure $\beta \in P_n$ s'écrit de manière unique sous la forme :

$$\beta = \beta_n \beta_{n-1} \dots \beta_2 \text{ ,}$$

où les β_k sont dans le groupe engendré librement par $A_{1,k}, \dots, A_{k-1,k}$.

Exercice 2.2.2. Donner une présentation du groupe P_n .

Exercice 2.2.3. Montrer que le groupe P_n est sans torsion (pas d'élément d'ordre fini autre que le trivial).

Via l'inclusion $\iota_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$, le groupe B_n agit par conjugaison sur P_{n+1} et cette action fixe globalement le groupe libre U_n . La proposition suivante montre que cette action sur U_n est équivalente à la représentation d'Artin via l'isomorphisme entre les groupes libres qui envoie x_k sur $A_{k,n+1}^{-1}$.

Proposition 2.2.4. *Pour $1 \leq k < n$, on a :*

$$\begin{aligned} \sigma_k A_{k,n+1} \sigma_k^{-1} &= A_{k+1,n+1} \\ \sigma_k A_{k+1,n+1} \sigma_k^{-1} &= A_{k+1,n+1}^{-1} A_{k,n+1} A_{k+1,n+1} \\ \sigma_k A_{j,n+1} \sigma_k^{-1} &= A_{j,n+1} \quad si \ j \notin \{k, k+1\} \end{aligned}$$

Exercice 2.2.5. Calculer l'abélianisé du groupe P_n .

Exercice 2.2.6. L'élément de Garside $\Delta_n \in B_n$ est défini récursivement par $\Delta_2 = \sigma_1$, et $\Delta_n = \sigma_1 \sigma_2 \dots \sigma_{n-1} \iota_{n-1}(\Delta_{n-1}) \sigma_{n-1} \dots \sigma_2 \sigma_1$ ($\iota_n : B_n \rightarrow B_{n+1}$ est l'inclusion par ajout d'un brin trivial).

1. Montrer que pour $1 \leq k \leq n-1$, on a : $\sigma_k \Delta_n = \Delta_n \sigma_{n-k}$.
2. Montrer que le centre de B_n est le sous-groupe engendré par $\delta_n = \Delta_n^2$.

2.3 Asphéricité

Pour un espace topologique pointé $(X, *)$ les groupes d'homotopie $\pi_n(X, *)$ sont formés des classes d'homotopie pointées d'applications continues de la sphère (S^n, s_0) vers $(X, *)$. Pour $n \geq 2$, ce sont des groupes commutatifs (voir par exemple Hatcher ch4).

Définition 2.3.1. Une application continue $p : E \rightarrow X$ est une fibration localement triviale si et seulement si pour tout $x \in X$, il existe un voisinage ouvert V_x et un homéomorphisme $\phi : p^{-1}(V_x) \rightarrow p^{-1}(x) \times V_x$ tel que le diagramme suivant commute (p_2 est la projection sur le second facteur) :

$$\begin{array}{ccc} p^{-1}(V_x) & \xrightarrow{\phi} & p^{-1}(x) \times V_x \\ \downarrow p & & \downarrow p_2 \\ V_x & \xrightarrow{Id} & V_x \end{array}$$

Théorème 2.3.2 (Suite exacte longue d'homotopie). *Soit $p : (E, e_0) \rightarrow (X, x_0)$ une fibration localement triviale de base X connexe par arcs de fibre $F = p^{-1}(x_0)$, alors on a une suite exacte longue d'homotopie :*

$$\begin{aligned} \dots &\rightarrow \pi_n(F, e_0) \rightarrow \pi_n(E, e_0) \rightarrow \pi_n(X, x_0) \rightarrow \dots \\ \dots &\rightarrow \pi_1(F, e_0) \rightarrow \pi_1(E, e_0) \rightarrow \pi_1(X, x_0) \rightarrow \pi_0(F, e_0) \rightarrow \pi_0(E, e_0) \rightarrow \{0\} \end{aligned}$$

Preuve : voir Hatcher, 4.41.

Théorème 2.3.3. *Pour $n \geq 1$, tous les groupes $\pi_k(\text{Conf}_n(\mathbb{C}), *)$, $k \geq 2$ sont triviaux.*

On dit que les espace $\text{Conf}_n(C)$ sont asphériques : tous les groupes d'homotopies sont triviaux sauf le π_1 .

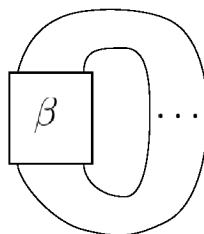


FIGURE 2.3 – Fermeture d’une tresse

2.4 Tresses et entrelacs

La fermeture d’un tresse $\beta \in B_n$ est l’entrelacs $\widehat{\beta}$ dans $S^3 \cong \widehat{\mathbb{R}}^3$ obtenu en refermant le graphe comme indiqué dans le diagramme 2.3.

Théorème 2.4.1 (Alexander). *Tout entrelacs dans S^3 est isotope à la fermeture d’une tresse.*

Théorème 2.4.2 (Markov). *Deux tresses ont des fermetures isotopes si et seulement si elles se correspondent par une suite de mouvements élémentaires qui sont :*

- a) soit des conjugaisons : $\beta \leftrightarrow u\beta u^{-1}$,
- b) soit des stabilisations : $B_n \ni \beta \leftrightarrow \iota_n(\beta)\sigma_n^{\pm 1} \in B_{n+1}$.