

Chapitre 3

Représentations de groupes de tresses

3.1 Représentation de Burau

L'application qui à $\sigma_k \in B_n$ associe la matrice $V_k \in GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ définie (par blocs) par :

$$V_k = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & t & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}$$

s'étend en un morphisme de groupe $\beta_n : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[t^{\pm 1}])$ qu'on appelle représentation de Burau.

Cette représentation de dimension n se décompose en somme directe d'une représentation de dimension 1, et d'une représentation de dimension $n-1$: la représentation de Burau réduite. Un changement de base faisant apparaître cette réduction est donné par la matrice :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$P^{-1}V_kP = \begin{pmatrix} \tilde{V}_k & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$\tilde{V}_k = \begin{pmatrix} I_{k-2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-k-2} \end{pmatrix}$$

$$\tilde{V}_1 = \begin{pmatrix} -t & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & I_{n-3} \end{pmatrix}, \quad \tilde{V}_{n-1} = \begin{pmatrix} I_{n-3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & -t \end{pmatrix}$$

Exercice 3.1.1. Montrer qu'avec un autre changement de base (indépendant de k) on obtient les matrices transposées des \tilde{V}_k .

Notons X_n le disque D^2 privé de n points : $X_n = D^2 - Q(n)$. On considère le revêtement infini cyclique \tilde{X}_n associé au morphisme $h : \pi_1(X_n, *) \rightarrow \mathbb{Z}$ qui envoie chaque générateur représenté par un lacet direct autour de l'un des points de $Q(n)$ sur 1. Ici on choisit le point de base $* = -i$, et on a fixé un relevé du point de base $\tilde{*}$. Pour une partie A de X_n , \tilde{A} est l'image inverse dans le revêtement \tilde{X}_n .

Proposition 3.1.2. *Pour tout difféomorphisme $f \in \text{Diff}(D^2, Q(n), S^1)$, il existe un unique relèvement pointé $\tilde{f} : \tilde{X}_n \rightarrow \tilde{X}_n$ de la restriction de f à X_n .*

Corollaire 3.1.3. *Le groupe $B_n \cong \mathcal{M}(D_n^2)$ agit sur les $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ -modules : $H_1(\tilde{X}_n)$, $H_1(\tilde{X}_n, \tilde{S}^1)$, $H_1^{BM}(\tilde{X}_n)$.*

Ici le groupe d'homologie de Borel-Moore $H_1^{BM}(\tilde{X}_n, \tilde{S}^1)$ est la limite projective sur les compacts $K \subset \tilde{X}_n$ de $H_1(\tilde{X}_n, \tilde{X}_n - K)$.

Pour $1 \leq j < n$, on note a_j le segment orienté ouvert de q_j à q_{j+1} . On relie a_j au point $-i \in \partial D^2$ qu'on prend ici comme point de base par un segment. On définit ainsi le relèvement \tilde{a}_j de a_j dans le revêtement \tilde{X}_n .

Pour chaque j , on note b_j la corde verticale, orientée vers le bas, qui passe par le milieu de a_j , et \tilde{b}_j son relèvement (en utilisant l'arc dans le demi-cercle inférieur pour relier au point de base).

Proposition 3.1.4. *Les \tilde{b}_j représentent une base de $H_1(\tilde{X}_n, \tilde{S}^1)$.*

Intersection de Blanchfield

A chaque \tilde{a}_j , $1 \leq j < n$, on associe une forme linéaire $\langle \cdot, \tilde{a}_j \rangle : H_1(\tilde{X}_n, \tilde{S}^1) \rightarrow \mathbb{Z}[t^{\pm 1}]$ définie sur les 1-cycles relatifs \tilde{c} transverses à \tilde{a}_j par :

$$\langle \tilde{c}, \tilde{a}_j \rangle = \sum_{\nu} (t^{-\nu} \tilde{c} \cdot \tilde{a}_j) t^{\nu}.$$

Ici \cdot compte l'intersection avec signe.

Chaque point d'intersection x entre a_k et la projection c dans X_n , reliée au point de base, contribue à l'intersection de Blanchfield pour ϵt^{ν} , où ϵ est le signe habituel, et $\nu \in \mathbb{Z}$ est l'évaluation du lacet qui va de $-i$ à x via c , puis de x à $-i$ via a_j ; ν est la somme des indices de ce lacet autour des points.

Proposition 3.1.5. *Les formes linéaires \tilde{a}_j , $1 \leq j < n$, sont bien définies et représentent la base de $\text{Hom}(H_1(\tilde{X}_n, \tilde{S}^1))$ duale des b_j .*

On peut donc utiliser cette intersection pour calculer la matrice de l'action du demi-twist t_k .

Proposition 3.1.6. *La matrice de l'action du demi-twist t_k dans la base (b_j) est égale à la matrice de Burau réduite \tilde{V}_k .*

La figure 3.1 montre que : $(t_k)_*(\tilde{b}_k) = t\tilde{b}_{k-1} - t\tilde{b}_k + \tilde{b}_{k+1}$.

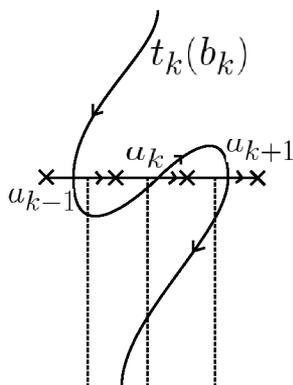


FIGURE 3.1 – Action du demi-twist

Exercice 3.1.7. Montrer que la représentation de Burau réduite $\tilde{\beta}_3$ est fidèle.

Si γ est un intervalle plongé dans D_n , avec ses extrémités dans $Q(n)$, alors un ϵ -voisinage de γ est un disque avec deux points difféomorphe à D_2^2 . Avec une telle carte, on définit le demi-twist t_γ qui est l'identité en dehors de notre petit disque et coïncide avec le demi-twist habituel via la carte.

- Exercice 3.1.8.*
1. Montrer que si γ et δ ont des extrémités distinctes et une intersection de Blanchfield nulle, alors les images par la représentation de Burau réduite $\tilde{\beta}_n$ de t_γ et t_δ commutent (voir 1.3 dans l'exposé Bourbaki de Turaev No 878).
 2. Montrer que les demi-twists associés aux courbes représentées dans la figure 3.2 satisfont la condition précédente mais ne commutent pas.
 3. En déduire la non fidélité de $\tilde{\beta}_n$ pour $n \geq 6$ (Long-Paton).

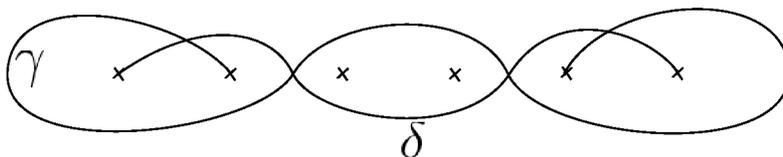


FIGURE 3.2 – Deux courbes définissant des demi-twists

3.2 La représentation de Lawrence-Krammer-Bigelow

Voir l'exposé Bourbaki de Turaev : Séminaire Bourbaki No 878.

3.3 L'équation de Yang-Baxter

Soient \mathbf{k} un anneau commutatif et V un \mathbf{k} -module. On souhaite construire des représentations $B_n \rightarrow GL(V^{\otimes n})$. Pour cela on se donne $R \in GL(V^{\otimes 2})$ et on associe au générateur σ_k l'élément $R_k = Id_V^{\otimes k-1} \otimes R \otimes Id_V^{\otimes n-k-1}$.

Proposition 3.3.1. *L'association $\sigma_k \mapsto R_k$, $1 \leq k < n$, s'étend en une représentation de B_n si et seulement si l'équation suivante, appelée équation de Yang-Baxter, est satisfaite dans $GL(V^{\otimes 3})$:*

$$(Id_V \otimes R)(R \otimes Id_V)(Id_V \otimes R) = (R \otimes Id_V)(Id_V \otimes R)(R \otimes Id_V) .$$

Soient $N \geq 2$, et V le $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ -module libre de base les e_{2k-N-1} , $1 \leq k \leq N$. On note E_{ij}^{kl} l'endomorphisme de $V^{\otimes 2}$ défini par la matrice élémentaire correspondant aux indices. Soit $F = \sum_{i < j} q E_{ij}^{ij} + \sum_{i > j} q^{-1} E_{ij}^{ij} + \sum_{i \neq j} E_{ij}^{ji}$.

Proposition 3.3.2. *a) $F^2 = (q + q^{-1})F$.*

b) $Id_V \otimes F)(F \otimes Id_V)(Id_V \otimes F) - (Id_V \otimes F) = (F \otimes Id_V)(Id_V \otimes F)(F \otimes Id_V) - (F \otimes Id_V)$.

Corollaire 3.3.3. *$R = qId_V - E$ est une solution de l'équation de Yang-Baxter.*

On obtient donc pour chaque N une représentation du groupe B_n . Notons que : $R - R^{-1} = (q - q^{-1})Id$.

Exercice 3.3.4 (Algèbres de Hecke). Pour $n \geq 2$, soit H_n , l'algèbre quotient de $\mathbf{k}[B_n]$ par l'idéal bilatère engendré par : $\sigma_1^2 - (q - q^{-1})\sigma_1 - 1$.

1. Montrer que les représentations précédentes sont bien définies sur H_n .
2. Montrer que H_n est de dimension finie avec une base indexée par les permutations.