

Chapitre 4

Le polynôme de Jones

4.1 Construction comme trace de Markov

Notons $\rho_n : B_n \rightarrow GL(V^{\otimes n})$ la représentation associée à la solution $R \in GL(V)$ de l'équation de Yang-Baxter du chapitre précédent, dans le cas $N = 2$. Ici V est le $\mathbb{Z}[q^{\pm 1}]$ de base $(e_{-1}, e_1) = (e_-, e_+)$.

Soit $\mu \in GL(V)$ l'opérateur diagonal défini par $\mu(e_\epsilon) = q^{-\epsilon} e_\epsilon$.

Pour $n \geq 0$, et $\beta \in B_n$, on pose :

$$P_2(\beta) = q^{-2w(\beta)} \text{Trace}(\rho_n(\beta) \circ \mu^{\otimes n}).$$

Ici $w(\beta)$ est le vrillage : la somme des signes des croisements d'un diagramme.

Théorème 4.1.1 (Jones). *a) La fonction P_2 est une fonction de Markov : $P_2(\widehat{\beta})$ est un invariant bien défini de la fermeture de la tresse $\widehat{\beta}$. b) L'invariant d'entrelacs P_2 vaut $q + q^{-1}$ pour le noeud trivial et vérifie la relation de Jones décrite dans la figure 4.1. Il est déterminé de manière unique par cette normalisation et la relation de Jones.*

$$q^2 P_2\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}\right) - q^{-2} P_2\left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nearrow \end{array}\right) = (q - q^{-1}) P_2\left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array}\right) \left(\begin{array}{c} \nwarrow \\ \nwarrow \end{array}\right)$$

FIGURE 4.1 – Relation de Jones

4.2 Crochet de Kauffman et polynôme de Jones

Pour un diagramme non orienté D , le crochet de Kauffman de D est le polynôme de Laurent défini par la formule qui suit. La somme est indexée par les applications s de

l'ensemble des croisements dans $\{-1, 1\}$, qu'on appelle *états* du diagramme. A chaque état s correspond une courbe plongée D_s définie localement dans la figure 4.2. On note $\#D_s$ le nombre de composantes de la courbe ; on pose $\delta = -A^2 - A^{-2}$, et $s(D) = \sum_c s(c)$.

$$\langle D \rangle = \sum_s A^{s(D)} \delta^{\#D_s} .$$

Si D est déjà une courbe plongée, on considère qu'il y a un état, et : $\langle D \rangle = \delta^{\#D}$.



FIGURE 4.2 – Crochet de Kauffman : résolution des croisements

Exemples 4.2.1. Pour le diagramme du nœud de trèfle positif représenté dans la figure 4.3 on obtient $(-A^{-3} + A^{-7} - A^5)\delta$.

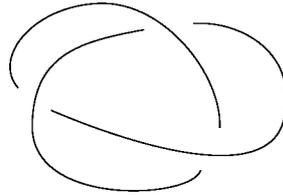


FIGURE 4.3 – Nœud de trèfle positif

Relations locales : On écrira des relations entre les valeurs du crochet de Kauffman pour des diagrammes qui sont identiques en dehors d'un petit disque où on représente la modification. Le crochet de Kauffman vérifie par exemple les relations décrites dans la figure 4.4. De plus ces relations déterminent le crochet de Kauffman, si on normalise avec la valeur 1 pour l'entrelacs vide.

$$\langle \text{crossing} \rangle = A \langle \text{resolution} \rangle + A^{-1} \langle \text{other resolution} \rangle$$

$$\langle D \circ \rangle = \langle D \rangle \delta$$

FIGURE 4.4 – Relations de Kauffman

Théorème 4.2.2. a) Le crochet de Kauffman est invariant par les mouvements de Reidemeister $R2$ et $R3$.

b) Le mouvement $R1$ multiplie le crochet de Kauffman par $-A^{\pm 3}$ (figure 4.5).

$$\langle \text{crossing} \rangle = -A^3 \langle \text{parallel} \rangle \quad \langle \text{crossing}' \rangle = -A^{-3} \langle \text{parallel} \rangle$$

FIGURE 4.5 – Crochet de Kauffman : Reidemeister 1

Pour un diagramme orienté D on note $w(D)$ la somme des signes des croisements (on peut l'appeler le vrillage, *writhe* en anglais). On obtient un invariant d'entrelacs orienté en corrigeant le crochet de Kauffman avec $w(\vec{D})$.

Théorème 4.2.3. a) L'expression $(-A^3)^{-w(D)} \langle D \rangle$ est invariante par mouvement de Reidemeister et définit un invariant d'entrelacs orienté qui en posant $q = -A^2$ appartient à $\mathbb{Z}[q \pm 1]$. On le note $P_2(L)$.

b) L'invariant $P_2(L)$ est déterminé par la relation de Jones 4.1 et la normalisation $P_2(U) = q + q^{-1}$ pour le noeud trivial U .

Remarque 4.2.4. Le polynôme de Jones original $V(L)$ est obtenu avec le changement de variable $q = -t^{-\frac{1}{2}}$ et la normalisation $V(U) = 1 : V(L) = \left(\frac{P_2(L)}{q + q^{-1}} \right)_{q = -t^{-\frac{1}{2}}}$.

Remarque 4.2.5. L'invariant P_2 peut être obtenu avec la théorie de représentation du groupe quantique $U_q sl(2)$. Il existe une série P_N , $N \geq 2$, qui peut (entre autres) être obtenue avec la théorie de représentation du groupe quantique $U_q sl(N)$, et qui est déterminée par la normalisation $P_N(U) = \frac{q^N - q^{-N}}{q - q^{-1}}$ et la relation de Jones généralisée :

$$q^N P_N(L_+) - q^{-N} P_N(L_-) = (q - q^{-1}) P_N(L_0) .$$

En remplaçant q^N par une nouvelle indéterminée α , on obtient le polynôme de Homfly. En spécialisant α à 1, on retrouve (à normalisation près) le polynôme d'Alexander-Conway.

Exercice 4.2.6. Montrer que le polynôme P_2 distingue les nœuds de trèfle droit et gauche.

Exercice 4.2.7. Calculer P_2 pour le nœud de huit (figure 4.6) et son miroir. Est-ce que le nœud de huit est isotope à son miroir ?

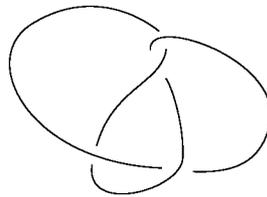


FIGURE 4.6 – Nœud de huit

4.3 Modèle de Lawrence-Bigelow

On note $Y_n = \text{Conf}_n(X_{2n})$ l'espace des configurations de $2n$ points distincts dans le disque privé de $2n$ points.

Par oubli des $2n$ points, on obtient un morphisme $\pi_1(Y_n, *) \rightarrow B_n$. En composant avec le morphisme d'abélianisation $B_n \rightarrow \text{Ab}(B_n) \cong \mathbb{Z}$, on associe à $\gamma \in \pi_1(Y_n, *)$ un entier b .

On a aussi un morphisme naturel $\pi_1(Y_n, *) \rightarrow B_{3n} \rightarrow \text{Ab}(B_{3n}) \cong \mathbb{Z}$ qui associe à $\gamma \in \pi_1(Y_n, *)$ un entier $b' = b + 2a$ (vérifier que $b' - b$ est pair).

On définit le revêtement régulier de groupe \mathbb{Z}^2 noté multiplicativement $\langle v, t \rangle$ avec le morphisme

$$\begin{aligned} \pi_1(Y_n, *) &\rightarrow \langle v, t \rangle \\ \gamma &\mapsto q^a t^b \end{aligned}$$

Intersection de Blanchfield

Soit $\tilde{A} \subset \tilde{Y}_n$ une sous-variété orientée de dimension n proprement plongée : l'intersection avec tout compact est compacte. On associe à \tilde{A} une forme linéaire

$$\langle \cdot, \tilde{A} \rangle : H_n(\tilde{Y}_n, \partial\tilde{Y}_n) \rightarrow \mathbb{Z}[v^{\pm 1}, t^{\pm 1}],$$

définie sur un cycle relatif transverse à tous les translatés de \tilde{B} , par :

$$\langle \tilde{B}, \tilde{A} \rangle = \sum_{a,b} ((v^{-a} t^{-b} \tilde{B}) \cdot \tilde{A}) v^a t^b.$$

Si on note A et B les projections dans Y_n , munies d'un chemin reliant au point de base, la contribution d'un point x de l'intersection de B avec A est égale à $\epsilon_x v^a t^b$; où ϵ_x est le signe obtenu en comparant l'orientation locale à l'orientation ambiante, et a, b sont obtenus en évaluant le lacet $l = \{l_1, \dots, l_n\}$ qui relie le point de base à x via B puis retourne au point de base via A : a est la somme des indices de ce lacet autour des $2n$ points, et b est la somme sur toutes les paires $i \neq j$ des degrés dans $\mathbb{R}P^1$ des lacets $[l_j - l_i]$.

Description homologique du polynôme de Jones

Pour $1 \leq k \leq n$, les segments ouverts F_k et les cercles immergées E_k dans le disque sont définis et reliés au demi-cercle supérieur comme décrit dans la figure 4.7. Le produit $F = [F_1 \times F_2 \cdots \times F_n]$ est un cube ouvert dans Y_n relié au point de base. On note \tilde{F} son relèvement dans \tilde{Y}_n : c'est un n -cube proprement plongé. Le produit $E = [E_1 \times E_2 \cdots \times E_n]$ est un tore de dimension n immergé dans Y_n relié au point de base. On note \tilde{E} son relèvement dans \tilde{Y}_n : c'est un tore de dimension n plongé dont la

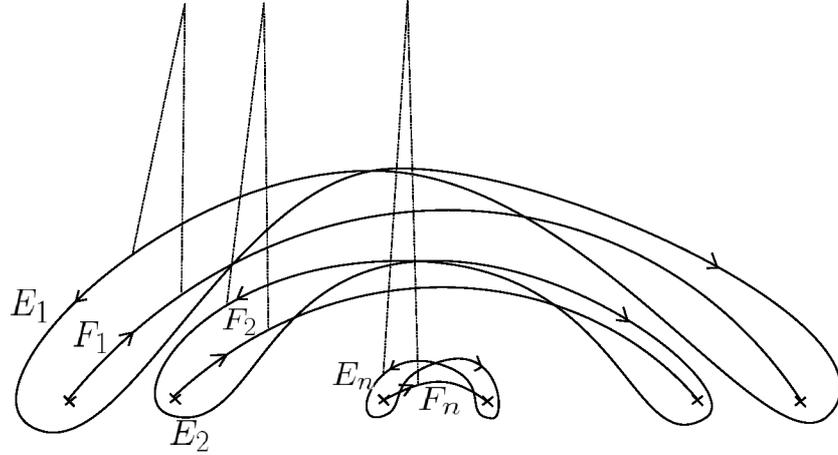


FIGURE 4.7 – Courbes du modèle de Lawrence-Bigelow

classe fondamentale représente un élément de $H_n(\tilde{Y}_n)$ (et aussi de $H_n(\tilde{Y}_n, \partial\tilde{Y}_n)$). on peut donc former l'intersection de Blanchfield.

En utilisant l'inclusion $B_n \rightarrow B_{2n} \cong \mathcal{M}(D_{2n}^2)$, une tresse $\sigma \in B_n$ agit sur X_{2n} (action définie à isotopie près), donc sur Y_n . Cette action commutant avec les morphismes qui définissent \tilde{Y}_n , se relève à \tilde{Y}_n . On peut donc considérer l'intersection $\langle \sigma\tilde{E}, \tilde{F} \rangle$.

Théorème 4.3.1 (Lawrence, Bigelow).

$$P_2(\hat{\sigma})_{q=-v^{-\frac{1}{2}}} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} (-v^{\frac{1}{2}})^{w(\sigma)} v^{-\frac{n}{2}} \langle \sigma\tilde{E}, \tilde{F} \rangle_{t=-v^{-1}} .$$

Le facteur $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ est le rapport entre l'orientation de \mathbb{C}^n et celle de $\mathbb{R}^n \oplus i\mathbb{R}^n$.