Chapitre 5

Homologie de Khovanov

5.1 Le complexe de Khovanov

On note A l'algèbre $\mathbb{Z}/2[X]/X^2$ avec la graduation : $\deg(1) = -1$, $\deg(X) = 1$ (le produit est une application homogène de degré 1). Sur A on définit une *comultiplication* :

$$\begin{array}{rrcl} \Delta : & A \otimes A & \to & A \\ & 1 & \mapsto & 1 \otimes X + X \otimes 1 \\ & X & \mapsto & X \otimes X \end{array}$$

Cette comultiplication est coassociative et admet une counité (vérifier), mais n'est pas multiplicative : il n'y a pas de structure d'algèbre de Hopf. Elle est cependant linéaire pour l'action de A à gauche et à droite.

A une courbe compacte sans bord Γ (une union de cercle), on associe l'espace vectoriel $V(\Gamma)$ qui est produit tensoriel de copies de A indexées par les composantes connexes de Γ :

$$V(\Gamma) = \bigotimes_{C \in \pi_0(\Gamma)} A_C \simeq A^{\otimes \sharp \Gamma} .$$

On note $\mathrm{qdim}(M)$ la dimension graduée d'un espace-vectoriel : $\mathrm{qdim}(A) = q + q^{-1}$, $\mathrm{qdim}(V(\Gamma)) = (q+q^{-1})^{\otimes \sharp \Gamma}$. Pour un espace vectoriel gradué, M, on note $M\{k\}$ le même espace vectoriel avec graduation décalée de sorte que : $\mathrm{qdim}(M) = (\mathrm{qdim}(M))\, q^k$.

Soit D un diagramme orienté. On considère :

$$K(D) = \bigoplus_s V(D_s)\{-w(D) - s(D)\} = \sum_s K_s(D)$$

Ici : $w(D)$ est le vrillage, c'est à dire la somme des signes des croisements.
Un état s est une application de l'ensemble des croisements vers $\{-1, 0, 1\}$ qui à un croisement positif associe 0 ou 1, et à un croisement négatif associe -1 ou 0.

L'espace vectoriel $K(D)$ est bigradué : $K(D) = \sum_{i,j} K^{i,j}(D)$. Ici j est le q-degré, et pour le facteur associé à l'état s, i vaut $s(D)$.

On définit l'application $\partial : K(D) \to K(D)$ par bloc : la restriction

$$\partial_s^{s'} : K_s(D) \to K_{s'}(D)$$

est nulle, sauf si s et s' sont différents en exactement un croisement c, où $s'(c) = s(c)+1$. On a alors deux possibilités :

- Soit on passe de D_s à $D_{s'}$ en fusionnant deux composantes, et dans ce cas on utilise la multiplication sur les facteurs tensoriels indexés par les composantes adjacentes au croisement c :
$$m_c : V(D_s) \to V(D_{s'}) \ .$$
- Soit on passe de D_s à $D_{s'}$ en scindant une composante, et dans ce cas on utilise une comultiplication sur les facteurs tensoriels correspondants :
$$\Delta_c : V(D_s) \to V(D_{s'}) \ .$$

Théorème 5.1.1. *a)* $(K(D), \partial)$ *est un complexe gradué.*
b) La caractéristique d'Euler graduée de $K(D)$ *est égale à* $P_2(D)$ *:*

$$\sum_{i,j} (-1)^i \mathrm{qdim}(K^{i,j}(D)) = P_2(D) \ .$$

c) Pour chaque mouvement de Reidemeister $D \leftrightarrow D'$ *, il existe une équivalence d'homotopie graduée* $K(D) \to K(D')$*.*

Exercice 5.1.2. Calculer l'homologie de Khovanov du nœud de trèfle.

Définition 5.1.3. L'homologie du complexe précédent ne dépend à isomorphisme près que de la classe d'isotopie de l'entrelacs : c'est l'homologie de Khovanov, notée $Kh(L)$.

Remarque 5.1.4. On peut raffiner la construction pour obtenir une version entière.