Chapitre 4

Introduction à la théorie des modules

4.1 Définitions et exemples de base

Soit A un anneau.

Définition 4.1.1. Un module (à gauche) sur A est un groupe abélien M muni d'une opération externe :

$$\begin{array}{rcl} A \times M & \to & M \\ (a, v) & \mapsto & a.v \end{array}$$

qui vérifie :

la double distributivité : $\forall (a,b) \in A^2\ \forall v \in M\ \ (a+b).v = a.v + b.v$ et $\forall a \in A\ \forall (v,w) \in M^2\ \ a.(v+w) = a.v + a.w$;

l'associativité mixte : $\forall (a,b) \in A^2\ \forall v \in M\ \ a.(b.v) = (ab).v$;

l'action du neutre : $\forall v \in M\ \ 1.v = v$.

Un module sur un corps est un espace vectoriel.

Exemples 4.1.2.

1. Un anneau A est un module sur lui-même ; une algèbre sur A est aussi un module.
2. Un groupe abélien est un module sur $\mathbb{Z}$.

Définition 4.1.3. Un sous-module d'un A-module M est un sous-groupe abélien qui est stable pour l'opération externe.

Remarque 4.1.4. Les sous-modules de l'anneau A, vu comme module à gauche sur lui-même sont les idéaux à gauche.

L'intersection d'une famille de sous-modules est un sous-module, et on a donc une notion de sous-module engendré par une partie non vide $F \subset M$: le plus petit sous-module qui contient F.

Proposition 4.1.5. *Le sous-module engendré par $F \subset M$ est l'ensemble $\mathcal{C}(F)$ des combinaisons linéaires des éléments de F.*

Définition 4.1.6. La somme (interne) d'une famille de sous-modules de M est le sous-module engendré par la réunion. On la note : $\sum\limits_{i \in I} M_i$.

Définition 4.1.7. Une application $f : M \to N$ entre les A-modules M et N est A-linéaire si et seulement si elle respecte les combinaisons linéaires :

$$\forall (a,b) \in A^2 \ \forall (v,w) \in M^2 \ f(a.v + b.w) = a.f(v) + b.f(w) \ .$$

Les applications A-linéaires de M vers N forment un module noté $\mathrm{Hom}_A(M,N)$. Les applications A-linéaires de M dans M (endomorphismes) forment une algèbre sur A, noté $\mathrm{End}_A(M)$. L'application réciproque d'un endomorphisme bijectif est linéaire : les endomorphismes bijectifs du A-module M forment un groupe noté $\mathrm{GL}_A(M)$.

Proposition 4.1.8. *Image et noyau d'une application linéaire sont des sous-modules.*

4.2 Exemples fondamentaux

4.2.1 Changement d'anneau

Si B est une A-algèbre, tout B-module est aussi un A-module.

4.2.2 Les modules A^I et $A^{(I)}$

On note A^I l'algèbre des applications de l'ensemble I dans A. On utilisera habituellement la notation $a = (a_i)_{i \in I}$ et le vocabulaire *famille*.
Les familles à support fini forment un idéal, donc un sous-module noté $A^{(I)}$.
Les élément de $A^{(I)}$ s'écrivent de manière unique comme combinaison linéaire des e_i qui prennent la valeur 1 en i et 0 ailleurs (base canonique).

Proposition 4.2.1 (Propriété universelle)**.** *Le A-module $A^{(I)}$ muni de la* base canonique $(e_i)_{i \in I}$ *vérifie la propriété universelle suivante : Pour tout A-module M, et toute famille $(b_i)_{i \in I}$ d'éléments de M, il existe une unique application linéaire $f : A^{(I)} \to M$ qui envoie chaque e_i sur b_i.*

Définition 4.2.2. Le A-module M est libre de base $(b_i)_{i\in I}$ si et seulement si l'application linéaire définie dans la proposition précédente est un isomorphisme.

4.2.3 Somme et produits directs

Soit $(M_i)_{i\in I}$ une famille de module.

Définition 4.2.3. Le produit $\prod\limits_{i\in I} M_i$ muni des opérations :

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) \ , \ a.(x_i) = (a.x_i) \ ,$$

est un A-module.

Pour chaque $j \in I$, la projection $p_j : \prod\limits_{i\in I} M_i \to M_j$ est linéaire.

Proposition 4.2.4 (Propriété universelle)**.** *Pour tout A-module N et toute famille d'applications linéaires $f_i : N \to M_i$, il existe une unique application linéaire $f : N \to \prod\limits_{i\in I} M_i$ telle que : $\forall j \ f_j = p_j \circ f$.*

Définition 4.2.5. La somme directe $\bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ est le sous-module du produit constitué des familles (x_i) qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls (presque nulles).

Pour chaque $j \in I$, on définit une application linéaire injective : $k_j : M_j \to \bigoplus\limits_{i\in I} M_i$ en associant à x_j la famille dont le seul terme non nul est x_j.

Proposition 4.2.6 (Propriété universelle)**.** *Pour tout A-module N et toute famille d'applications linéaires $g_i : M_j \to N$, il existe une unique application linéaire $g : \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \to N$ telle que : $\forall j \ g_j = g \circ k_j$.*

Lorsque les modules M_i sont des sous-modules d'un module M, les inclusions définissent une application linéaire canonique $g : \bigoplus\limits_{i\in I} M_i \to M$.

Définition 4.2.7. a) On dit que la somme interne des modules M_i est directe si et seulement si l'application canonique g est injective.
b) On dit que M est somme directe des M_i lorsque l'application canonique g est bijective.
c) Deux sous-modules de M sont supplémentaires si et seulement si M est égal à leur somme directe (chacun est dit supplémentaire de l'autre).

Exercice 4.2.8. Montrer que des sous-modules sont en somme directe si et seulement si chacun a une intersection triviale avec la somme des autres. 21/10/2010

4.2.4 Module quotient

Proposition 4.2.9. *Soit N un sous-module d'un A-module M, alors l'opération externe induit sur le groupe abélien quotient M/N une structure de A-module.*

Proposition 4.2.10 (Factorisation d'un morphisme d'anneau)**.** *Soit $f : M \to M'$ une application linéaire, N un sous-module de M, $p : M \to M/N$ la projection* canonique. *L'application linéaire f factorise par le quotient M/N si et seulement si $N \subset \mathrm{Ker}(f)$. Le morphisme g a même image que f et est injectif si et seulement si $N = \mathrm{Ker}(f)$.*

Corollaire 4.2.11 (Premier théorème d'isomorphisme)**.** *Soit $f : M \to N$ une application linéaire, alors le quotient $M/\mathrm{Ker}(f)$ est isomorphe à l'image de f.*

Exercice 4.2.12 (Second théorème d'isomorphisme). Soient N et P deux sous-module de M. Démontrer que : $(N + P)/P$ est isomorphe à $N/N \cap P$.

Exercice 4.2.13 (Troisième théorème d'isomorphisme). Soient $P \subset N$ deux sous-modules de M. Démontrer que l'inclusion de N dans M induit une identification de N/P avec un sous-module de M/P, et que : M/N est isomorphe à $(M/P)/(N/P)$.

4.3 Modules de type fini

Définition 4.3.1. Un A-module est de type fini si et seulement s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

Remarque 4.3.2. La condition équivaut à l'existence d'une application linéaire surjective $f : A^n \to M$, c'est à dire à l'existence d'un isomorphisme avec un quotient de A^n.

Lemme 4.3.3. *Soit N est un sous-module de type fini d'un A-module M. Si le quotient M/N est de type fini, alors M est de type fini.*

Théorème 4.3.4. *Sur un anneau commutatif noethérien, tout sous-module d'un module de type fini est de type fini.*

Théorème 4.3.5 (Hilbert)**.** *Si A est une anneau commutatif noethérien, alors $A[X]$ et plus généralement $A[X_1, \ldots, X_n]$ sont des anneaux noethériens.*

Proposition 4.3.6. *Un quotient d'un anneau noethérien est noethérien.*

Corollaire 4.3.7. *Si A est un anneau commutatif noethérien, tout quotient de $A[X_1, \ldots, X_n]$ est noethérien.*

4.4 Produit tensoriel de deux modules

Définition 4.4.1. Lorsque M, N et F sont trois modules sur un même anneau commutatif A, on appelle application bilinéaire une application $f : M \times N \to F$, qui est linéaire dans chacune des deux variables.

Le produit tensoriel permet de ramener l'étude des applications bilinéaires à celle des applications linéaires.

Définition 4.4.2. Lorsque M et N sont deux modules sur un même anneau commutatif A, un produit tensoriel de M et N est un couple (E, ϕ), où E est un A-module, $\phi : M \times N \to F$ est une application bilinéaire, qui satisfait la propriété universelle suivante :
Pour toute application bilinéaire $f : M \times N \to F$, il existe une unique application linéaire $g : E \to F$ telle que : $f = g \circ \phi$.

Proposition 4.4.3. *Deux produits tensoriels des A-modules M et N sont canoniquement isomorphes. On dit que le produit tensoriel est unique à isomorphique canonique près.* 25/10/2010

Théorème 4.4.4. *Deux modules M et N sur le même anneau commutatif A admettent un produit tensoriel noté $M \otimes_A N = M \otimes N$: le quotient de $C = A^{(M \times N)}$ par le sous-module des éléments de la forme : où $e(x, y)$, $x \in M$, $y \in N$ est la base canonique de C.*

La classe de $e(x, y)$ dans $M \otimes N$ sera notée $x \otimes y$.

Proposition 4.4.5. *Soit A une anneau commutatif. Pour tous les ensembles I et J, on a un isomorphisme canonique :*

$$A^{(I)} \otimes A^{(J)} \approx A^{(I \times J)} \ .$$

Corollaire 4.4.6. *Le produit tensoriel de deux modules libres sur un anneau commutatif A est un module libre sur A.*

Proposition 4.4.7. *Si J est un idéal de l'anneau commutatif A, alors $A^{(I)} \otimes A/J$ est un A/J-module et on a un isomorphisme canonique*

$$A^{(I)} \otimes A/J \approx (A/J)^{(I)} \ .$$

Corollaire 4.4.8. *Soit J un idéal de l'anneau commutatif A. Si M un A-module libre, alors $M \otimes A/J$ est un A/J module libre.*

Si S est une partie multiplicative de l'anneau intègre A, on note $S^{-1}M$ le $S^{-1}A$-module des fractions de M à dénominateurs dans S. C'est le quotient de $M \times S$ par la relation :

$$(v, s) \sim (v', s') \leftrightarrow \exists t \in S \ ts'v = tsv' \ .$$

Proposition 4.4.9. *On a un isomorphe canonique $S^{-1}A \otimes M \approx S^{-1}M$.*

4.5 Modules libres, modules de torsion

Définition 4.5.1. Le rang d'un A-module est le cardinal maximal d'une partie libre.

Théorème 4.5.2. *Soit A un anneau commutatif et M un A-module qui admet une base finie de cardinal n, alors toutes les bases ont le même cardinal et celui-ci est égal au rang de M.*

Définition 4.5.3. a) Un élément v d'un A-module M est de torsion si et seulement s'il existe $a \in A - \{0\}$ tel que $a.v = 0$.
b) Un module est de torsion si et seulement si tous ses éléments sont de torsion.

Exemples 4.5.4. 1. Dans un groupe abélien les éléments de torsion sont ceux d'ordre fini.
2. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de torsion.

04/11/2010

Proposition 4.5.5. *Soit M un module sur un anneau commutatif A.*
a) L'ensemble de ses éléments de torsion forme un sous-module (de torsion) $\mathrm{Tors}(M)$. *b)* $\mathrm{Tors}(M)$ *est le noyau de l'application de M dans $\mathcal{Q}(A) \otimes M$ qui à v associe $1 \otimes v$.*

Théorème 4.5.6. *Soit M un module libre de rang fini n sur un anneau commutatif intègre A, et N un sous-module libre.*
a) Le rang de N est inférieur ou égal à n.
b) Le rang de N est égal à n si et seulement si M/N est de torsion.
c) Il existe un sous-module libre P tel que :

$$N \cap P = \{0\} \text{ et } \mathrm{rg}(N) + \mathrm{rg}(P) = n \ .$$