Chapitre 7

Séparabilité

7.1 Polynômes et extensions séparables

Définition 7.1.1. a) Soit K un corps commutatif. Un polynôme irréductible $P \in K[X]$ est séparable sur K si et seulement s'il n'a pas de racine multiple dans son corps de décomposition.
b) Un polynôme $P \in K[X]$ est séparable sur K si et seulement si ses facteurs irréductibles sont séparables. Dans le cas contraire, on dit que P est inséparable.

Proposition 7.1.2. *a) Si K est de caractéristique nulle, un polynôme irréductible de $K[X]$ est toujours séparable.*
b) Si K est de caractéristique $p > 0$, un polynôme irréductible de $K[X]$ est inséparable si et seulement s'il appartient à $K[X^p]$.

Définition 7.1.3. Soit $f : K \to L$ une extension algébrique (tout élément de L est algébrique sur K).
a) Un élément $\alpha \in L$ est séparable si et seulement si son polynôme minimal est séparable.
b) L'extension est séparable si et seulement si tous les éléments de L sont séparables.

Proposition 7.1.4. *Soit $k \to K \to L$ une tour d'extension. Si $k \to L$ est séparable, alors $k \to K$ et $K \to L$ sont séparables.*

Définition 7.1.5. Un corps K est parfait si et seulement si toute extension algébrique est séparable.

Remarque 7.1.6. Tout corps de caractéristique zéro est parfait.

7.2 Corps parfaits de caractéristique non nulle

On rappelle que sur un corps K de caractéristique $p > 0$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} K & \to & K \\ x & \mapsto & x^p \end{array}$$

est un homomorphisme, appelé homomorphisme de Frobenius. Comme homomorphisme de corps, il est toujours injectif. Pour un corps fini, cet homomorphisme est surjectif.

Théorème 7.2.1. *Un corps de caractéristique non nulle est parfait si et seulement si son homomorphisme de Frobenius est surjectif.*

Exercice 7.2.2. Soit K un corps de caractéristique non nulle p.

1. Montrer que si b n'a pas de racine p-ième dans K, alors $X^p - b$ est irréductible sur K.
2. Montrer que si b n'a pas de racine p-ième dans K, alors pour tout $k > 0$ $X^{p^k} - b$ est irréductible sur K.

7.3 Séparabilité et morphismes

Etant donné deux extensions $k \to K$ et $k \to L$, on s'intéresse au cardinal de l'ensemble $Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L)$ des k-morphismes (morphismes de k-algèbre) de K dans L.

Proposition 7.3.1. *Soient K et L deux extensions de k. Si K est une extension simple : $K = k(\alpha)$, alors l'ensemble $Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L)$ est en bijection avec les racines du polynôme minimal P_α dans L.*
En particulier : $\sharp Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L) \leq [K : k]$.

Théorème 7.3.2. *Soit $k \to K$ une extension de degré fini.*
a) Pour tout extension $k \to L$, $\sharp Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L) \leq [K : k]$.
b) Si l'extension $k \to K$ est séparable et si L est une extension de k algébriquement close, alors $\sharp Hom_k(K, L) = [K : k]$.
c) S'il existe une extension L de k telle que : $\sharp Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L) = [K : k]$, alors $k \to K$ est séparable.

Lemme 7.3.3 (Transitivité)**.** *Si les extensions $k \to K$ et $K \to L$ sont séparables, alors $k \to L$ est séparable.*

Théorème 7.3.4. *Une extension de degré fini $k \to K$ est séparable si et seulement si elle est engendrée par des éléments séparables.*

7.4 Elément primitif

Théorème 7.4.1. *Toute extension $k \to K$ qui est séparable de degré fini est simple (i.e. admet un élément primitif).*

Exercice 7.4.2. Montrer que si le corps de base k est infini, un k-espace vectoriel E n'est pas réunion finie de sous-espaces propres.

Chapitre 8

Théorie de Galois

Notation : On note $(F : K)$ l'extension $K \subset F$.

8.1 Extensions normales

Définition 8.1.1. Une extension $f : K \to L$ est normale si et seulement si tout polynôme irréductible de $K[X]$ qui admet une racine dans L est scindé dans L.

Théorème 8.1.2. *Soit $f : K \to L$ une extension. Il y a équivalence entre :*
a) l'extension est normale et de degré fini ;
b) L est corps de décomposition d'un polynôme unitaire de $K[X]$.

Définition 8.1.3. Une clôture normale d'une extension de degré fini : $f : K \to L$ est une extension $g : L \to L'$ telle que
a) l'extension $g \circ f : K \to L'$ est normale, et
b) l'extension $g : L \to L'$ est minimale pour la propriété a).

Proposition 8.1.4. *Toute extension admet une clôture normale, unique à isomorphisme près.*

8.2 Automorphismes de corps

Définition 8.2.1. a) Un automorphisme du corps K est un homomorphisme bijectif de K dans lui-même.
b) Un automorphisme d'une extension $(F : K)$ est un automorphisme de F qui fixe les éléments de K (dont la restriction à K est l'identité).