

EXAMEN , LUNDI 10 JANVIER 2011

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices **A**, **B**, **C**, **D** et **E** peuvent être traités indépendamment. Les résumés de cours sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif : 3+3+3+5,5+5,5.

A– Soient G le groupe abélien libre de base (e_1, e_2, e_3) et H le sous-groupe engendré par $f_1 = 3e_1 + e_2 + e_3$, $f_2 = e_1 + 3e_2 + e_3$, $f_3 = e_1 + e_2 + 3e_3$.

1. Démontrer que le quotient G/H est un groupe fini et calculer ses facteurs invariants.
2. Déterminer une base (u, v, w) de G telle qu'il existe une base de H de la forme (au, bv, cw) , avec a, b, c des entiers positifs vérifiant $a|b$ et $b|c$.

B–

1. Montrer que le polynôme $P = X^3 + X^2 - 2X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Calculer le discriminant de P .
3. Calculer le groupe de Galois de P (son cardinal et sa structure).

C– Soit $\zeta = e^{\frac{i2\pi}{7}}$, et $\alpha = \zeta + \zeta^{-1}$.

1. Quel est le degré de l'extension $(\mathbb{Q}(\zeta) : \mathbb{Q}(\alpha))$? Préciser le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}(\alpha)$.
2. (a) Quel est le polynôme minimal de ζ sur $\mathbb{Q}$?
(b) Quel est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$?
3. Est-ce que l'extension $(\mathbb{Q}(\alpha) : \mathbb{Q})$ est galoisienne ?

D–

1. Montrer que le polynôme $P = X^6 + X^3 + 1$ est irréductible dans $\mathbb{F}_2[X]$.
2. On note K le corps $\mathbb{F}_2[X]/(P)$ et $\alpha \in K$ la classe de X dans K .
(a) Quel est le cardinal de K ?
(b) Quels sont les ordres respectifs de α et $\beta = \alpha^3$ dans le groupe multiplicatif de K ?
(c) Soit $\gamma = \alpha^4 + \alpha^5$. Calculer γ^8 . Quel est l'ordre de γ dans le groupe multiplicatif de K ?
3. Décrire le groupe de Galois $\text{Gal}(K, \mathbb{F}_2)$.
4. Quels sont les sous-corps de K ? Donner avec précision les éléments de chacun d'eux.

E– Soit d un nombre premier et P un polynôme à coefficient rationnels. On dit que P satisfait l'hypothèse $\mathcal{H}(d)$ si et seulement si :

le polynôme P est de degré d , il est irréductible sur $\mathbb{Q}$ et a exactement $d - 2$ racines réelles.

1. Montrer que $X^5 - 6X + 3$ satisfait l'hypothèse $\mathcal{H}(5)$.
2. Soit P un polynôme qui satisfait l'hypothèse $\mathcal{H}(d)$ pour un nombre premier $d > 2$. On note G son groupe de Galois, c'est à dire $G = \text{Gal}(L : \mathbb{Q})$, où $L \subset \mathbb{C}$ est le corps de décomposition de P .
(a) Montrer que le cardinal de G est divisible par d .
(b) Montrer que G contient un élément d'ordre d .
(c) Montrer que G contient un élément d'ordre 2.
(d) Montrer que l'action sur les racines de P définit un isomorphisme entre le groupe G et le groupe symétrique $\mathcal{S}_d$.
3. Quel est le groupe de Galois sur $\mathbb{Q}$ du polynôme $X^5 - 6X + 3$? Est-il résoluble ?