Examen , Mardi 14 juin 2011

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices **A**, **B**, **C**, **D** et **E** peuvent être traités indépendamment. Les résumés de cours sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif : 2+4+6+8.

A– Trouver les facteurs invariants du groupe abélien ($\mathbb{Z}$-module) :

$$\mathbb{Z}/20\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}/15\mathbb{Z} \ .$$

B–

1. Montrer que le polynôme $P = X^3 + X^2 - 2X - 3$ est irréductible sur $\mathbb{Q}$.
2. Calculer le discriminant de P.
3. Déterminer le groupe de Galois de P (son cardinal et sa structure).

C– On note $\mathbb{F}_{11}$ le corps $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$.

1. Trouver un polynôme P dans $\mathbb{F}_{11}[X]$ tel que le quotient $\mathbb{F}_{11}[X]/P$ soit un corps à 121 éléments.

   Pour la suite de l'exercice on note K un corps à 121 éléments.
2. Combien existe-t-il de polynômes unitaires irréductibles de degré 2 à coefficients dans $\mathbb{F}_{11}$? Sont-ils irréductibles sur K ?
3. Calculer 7^{24} dans $\mathbb{F}_{11}$.
4. Quel est l'ordre du groupe multiplicatif K^* ? Montrer que 7 n'est pas la puissance 5-ième d'un élément de K.
5. Etudier l'irréductibilité du polynôme $X^5 - 7$ sur K, sur $\mathbb{F}_{11}$, sur $\mathbb{Q}$.

D–

Soit $\zeta = e^{\frac{i\pi}{14}}$. Le but de l'exercice est de décrire les corps contenus dans le corps cyclotomique $L = \mathbb{Q}(\zeta)$.

1. Déterminer la structure du groupe multiplicatif $(\mathbb{Z}/28\mathbb{Z})^\times$.
2. (a) Quel est le nombre de sous-groupes du groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$?
   (b) Faire la liste de tous les sous-groupes H du groupe $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.
   (c) Pour chaque sous-groupe H de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, déterminer la structure du groupe quotient G/H.
3. Soit $F = \mathbb{Q}(\nu)$, avec $\nu = e^{\frac{i2\pi}{7}}$.
   (a) Quel est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F : \mathbb{Q})$?
   (b) Trouver un nombre réel non rationnel α dans F. Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ de degré 3.
   (c) Soit $\beta = \nu + \nu^2 + \nu^4$. Montrer que $\mathbb{Q}(\beta)$ est une extension quadratique de $\mathbb{Q}$.
   (d) Quels sont les sous-corps de F ?
4. (a) Quel est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$?
   (b) Trouver trois éléments x_1, x_2, x_3 de L quadratiques sur $\mathbb{Q}$ qui engendrent des extensions deux à deux distinctes.
   (c) Décrire tous les corps K contenus dans L, ainsi que les groupes de Galois $\mathrm{Gal}(L : K)$ et $\mathrm{Gal}(K : \mathbb{Q})$.