Chapitre 1

Espaces topologiques, exemples

Introduction

On suppose connues les notions de base de topologie (voir par exemple Bourbaki, Topologie générale I). Un espace compact est un espace topologique séparé qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. Le cas échéant on dira quasi-compact pour un espace topologique non nécessairement séparé qui vérifie la propriété de Borel-Lebesgue. La topologie algébrique développe des outils (des invariants) pour étudier notamment le problème d'homéomorphisme. Etant donnés deux espaces topologiques, soit on peut construire un homéomorphisme, soit on calcule certains de leurs invariants en espérant les distinguer. On rappelle la proposition suivante, utile dans la construction d'homéomorphismes.

Proposition 1.0.1. *Toute application continue injective d'un espace quasi-compact dans un espace séparé est un plongement (un homéomorphisme avec son image munie de la topologie induite) ; en particulier toute application continue bijective d'un espace quasi-compact dans un espace séparé est un homéomorphisme.*

1.1 Construction d'espaces quotients

On note X/A le quotient de l'espace topologique X par la relation d'équivalence qui identifie tous les points du sous-espace A.

Exercice 1.1.1. Montrer que si A est une partie compacte d'une espace X séparé, alors X/A est séparé.

Notation : $D^n \subset \mathbb{R}^n$ est la boule unité, $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est la sphère unité.

Exercice 1.1.2. Montrer que D^n/S^{n-1} est homéomorphe à S^n.

Soient $A \subset X$, et $f : A \to Y$ une application continue. On note $Y \cup_f X$ le quotient de $Y \amalg X$ par la relation d'équivalence engendrée par les identifications de a avec $f(a)$, pour tout $a \in A$.

Exercice 1.1.3. Montrer que la sphère S^3 est homéomorphe à $D^2 \times S^1 \cup_{Id_{S^1 \times S^1}} S^1 \times D^2$.

Exercice 1.1.4. Montrer que si A est un fermé de X, et $f : A \to Y$ est une application continue, alors la projection canonique $Y \amalg X \to Z = Y \cup_f X$ induit un plongement fermé $Y \to Z$, et un plongement ouvert $(X - A) \to Z$.

Soit X un espace topologique. Une application $f : X \to Y$ définit sur X une relation d'équivalence : définie par l'égalité des images. On note $X/\mathcal{R}_f$ l'espace topologique quotient.

Définition 1.1.5. Une application continue $f : X \to Y$ est une application quotient si et seulement si elle induit un homéomorphisme $X/\mathcal{R}_f \approx Y$.

Remarque 1.1.6. Si f est ouverte (resp. fermée), alors f est une application quotient. Si f est surjective, X quasi-compact et Y séparé, alors f est une application quotient.

1.2 Complexes simpliciaux

Définition 1.2.1. Un complexe simplicial $K = (V, S)$ consiste en un ensemble V de sommets et un ensemble $S \subset \mathcal{P}(V)$ de sous-ensembles finis de V, appelés simplexes, tels que :
a) S contient tous les singletons ;
b) tout sous-ensemble non vide (face) d'un simplexe $\sigma \in S$ est dans S.

Si σ est un simplexe (un ensemble fini), alors sa réalisation géométrique $|\sigma|$ est *l'enveloppe convexe de ses sommets* : $|\sigma| = \{\sum_{v \in \sigma} t_v v\} \subset \mathbb{R}^\sigma$. La réalisation géométrique $|K|$ est l'espace quotient de $\amalg_\sigma |\sigma|$ par la relation d'équivalence associée à l'application qui étend l'inclusion de V dans $\mathbb{R}^V$ linéairement sur chaque simplexe.

Si on munit $\mathbb{R}^V$ de la topologie produit, alors l'inclusion $|K| \to \mathbb{R}^V$ est continue, donc l'espace topologique $|K|$ est séparé. Cette inclusion n'est pas toujours un plongement. On peut aussi mettre sur $|K|$ la topologie métrique :

$$d(\sum_v t_v v, \sum_v t'_v v) = \sqrt{\sum_v (t_v - t'_v)^2)}\ .$$

On note $|K|_d$ l'espace topologique correspondant ; la topologie de $|K|$ est plus fine que celle de $|K|_d$.

Définition 1.2.2. Un complexe simplicial est localement fini si et seulement si chaque sommet n'appartient qu'à un nombre fini de simplexe.

Etant donné un simplexe géométrique $|\sigma|$, on note $|\dot{\sigma}|$ son bord : au moins une coordonnée barycentrique nulle, et $< \sigma >= |\sigma| - |\dot{\sigma}|$ le *simplexe ouvert*. Les simplexes ouverts forment une partition de $|K|$.

Lemme 1.2.3. *Soient $K = (V, S)$ un complexe simplicial et $A \subset |K|$ un sous-espace de sa réalisation géométrique. Un sous-ensemble $A' \subset A$ représentatif de la partition de A obtenue en intersectant avec les simplexes ouverts $< \sigma >$ est un sous-espace fermé discret.*

Démonstration. Chaque σ ne contient qu'un nombre fini de points de A', donc A' est fermé dans X. Pour chaque $x \in A'$, $A' - \{x\}$ est aussi fermé dans X et aussi dans A'. Le point $\{x\}$ est donc ouvert de A'. □

Corollaire 1.2.4. *Un sous-ensemble de $|K|$ est relativement compact si et seulement s'il est contenu dans une réunion finie de simplexes.*

Théorème 1.2.5 (Spanier Ch3.II.8)**.** *Pour un complexe simplicial $K = (V, S)$, il y a équivalence entre :*

(a) K est localement fini ;

(b) $|K|$ est localement compact ;

(c) les topologies de $|K|$ et de $|K|_d$ sont les mêmes ;

(d) $|K|$ est métrisable ;

Définition 1.2.6. Une triangulation d'un espace topologique X est la donnée d'un complexe simplicial $K = (V, S)$ et d'un homéomorphisme entre $|K|$ et X.

Remarque 1.2.7. Un complexe simplicial fini (nombre fini de simplexes) est compact. Dans ce cas une bijection continue $|K| \to X$ est une triangulation.

Définition 1.2.8. Une subdivision d'un complexe simplicial $K = (V, S)$ est un complexe simplicial $K' = (V', S')$ tel que :

a) $V' \subset |K|$,

b) tout simplexe $\sigma' \in S'$ est contenu dans la réalisation $|\sigma|$ d'un simplexe $\sigma \in S$;

c) l'application $|K'| \to |K|$ qui étend linéairement l'inclusion de S' est un homéomorphisme.

Théorème 1.2.9 (Spanier Ch3.III.4)**.** *Soient $K = (V, S)$ et $K' = (V', S')$ des complexes simpliciaux satisfaisant les conditions a) et b) ci-dessus, alors K' est une subdivision de K si et seulement si pour tout $s \in K$, les $< \sigma' > \subset < \sigma >$ forment une partition finie de $< \sigma >$.*

La subdivision barycentrique d'un complexe simplicial $K = (V, S)$ a pour sommets les isobarycentres w_σ des faces $\sigma \in F$ de K. Ses simplexes sont en bijection avec les suites d'inclusions $\sigma_0 \subset \sigma_1 \subset \cdots \subset \sigma_m$ de simplexes de K. D'après le théorème précédent, c'est une subdivision de K.

Homologie simpliciale

Une orientation d'un simplexe est un ordre total de ses sommets à permutation paire près : chaque simplexe a deux orientations. On définit l'homologie simpliciale avec le complexe de chaîne $(C^{\text{simp}}(K), \partial)$, où $C^{\text{simp}}(K)$ est le groupe abélien libre engendré par les simplexes orientés, quotienté par la relation qui identifie un simplexe orienté avec l'opposé du même simplexe muni de l'autre orientation. Ce groupe est gradué par la dimension des simplexes : $C^{\text{simp}}(K) = \sum_{n \geq 0} C_n^{\text{simp}}(K)$.

Le bord $\partial_n : C_n^{\text{simp}}(K) \to C_{n-1}^{\text{simp}}(K)$ est définie par :

$$\partial_n[v_0, \dots, v_n] = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i [v_O, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n] \ .$$

Ici $[v_0, \dots, v_n]$ note le simplexe avec l'orientation donné par l'ordre d'énumération, et $[v_0, \dots, \hat{v}_i, \dots, v_n]$ est la face orientée opposée au sommet v_i, i.e. obtenue en enlevant v_i.

On vérifie $\partial \circ \partial = 0$ et on définit :

$$H_n^{\text{simp}}(K) = Z_n(K)/B_n(K) \ ,$$

où $Z_n(K)$ est le noyau de ∂_n et $B_n(K)$ est l'image de ∂_{n+1}.

On peut montrer que l'homologie est invariante par subdivision. On montrera que dans le cas d'une triangulation, c'est un invariant topologique : les homologies simpliciales de deux triangulations sont (canoniquement) isomorphes.

1.3 Espaces cellulaires

Définition 1.3.1. Soit X un espace topologique, on dit que X est obtenu à partir de $A \subset X$ par attachement de cellules de dimension n si et seulement s'il existe des applications

$$(\Phi_i, \phi_i) : (D^n, S^{n-1}) \to (X, A), \quad i \in I \ ,$$

telles que l'application induite par l'inclusion de A et $\Phi = \amalg_i \phi_i$

$$A \cup_\phi \amalg_i D_i^n \to X \ ,$$

soit un homéomorphisme.

Définition 1.3.2. Un CW-complexe est un espace topologique X muni d'une filtration

$$X^0 \subset X^1 \subset X^2 \subset \dots$$

par des sous-espaces fermés de réunion X, telle que :

1. X^0 est un espace discret ;

2. Pour $n \geq 1$, X^n est obtenu à partir de X^{n-1} par attachement de cellules de dimension n ;
3. X a la topologie faible définie par les X^n : $F \subset X$ est fermé si et seulement si pour tout n, $F \cap X^n$ est fermé.

Le sous-espace X^n est le n-squelette. Les composantes connexes de $X^n - X^{n-1}$ sont les n-cellules ouvertes. Dans CW, W est pour *Weak* (weak topology = topologie faible), et le C est pour *Closure finite* : l'adhérence de chaque n-cellule ne rencontre qu'un nombre fini de cellules du $n-1$-squelette.

On définit l'homologie cellulaire avec le complexe de chaîne $(C^{\text{cell}}(K), \partial)$, où $C^{\text{cell}}(K)$ est le groupe abélien libre engendré par les cellules orientées, quotienté par changement de signe pour le changement d'orientation. La définition du bord en général utilisera la notion de degré. Dans le cas où chaque application d'attachement $\phi : S^{n-1} \to X^{n-1}$ d'une cellule de dimension n a au moins une valeur régulière [1] pour chaque cellule de dimension $n-1$ rencontrée par l'image de son bord, alors chaque pré-image contribue par ± 1 suivant le signe du jacobien dans des cartes locales orientées. La convention d'orientation pour une sphère $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ est donnée par est donnée par la projection stéréographique de pôle $(-1, 0, \ldots, 0)$.

La réalisation d'un complexe simplicial a une ctructure de CW-complexe, et dans ce cas, les complexes de chaînes simpliciaux et cellulaires coïncident. Nous démontrerons l'invariance topologique pour l'homologie cellulaire.

1.4 Variétés topologiques

Définition 1.4.1. Une variété topologique de dimension n à bord est un espace séparé dénombrable à l'infini (réunion dénombrable de compacts) dans lequel tout point a un voisinage homéomorphe à un ouvert de $]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^n$; un tel homéomorphisme est appelé une carte.

On montrera que la dimension est bien définie : une variété de dimension n n'est pas homéomorphe à une variété de dimension $m \neq n$.

On définit le bord ∂M d'une variété M comme l'ensemble des points x qui n'ont pas de voisinage homéomorphe à $\mathbb{R}^n$; c'est une variété de dimension $n-1$.

Exercice 1.4.2. Montrer que toute variété compacte se plonge dans un espace euclidien de dimension finie $\mathbb{R}^N$.

Exercice 1.4.3. Montrer que toute variété se plonge dans $l^2(\mathbb{R})$.

1. Cela veut dire qu'en chaque préimage ϕ est un difféomorphisme local ;

Une variété differentiable de classe C^k ($1 \leq k \leq \infty$) est une variété munie d'un atlas maximal dont les changements de carte sont de classe C^k. On appelle variété lisse une variété différentiable de classe C^∞.

Remarque 1.4.4. Les variétés topologiques de dimension inférieure ou égale à 3 admettent une structure lisse unique à difféomorphisme près (Moise, Annal of Math. 1952).

Etant donné deux variétés à bord M_1 et M_2 de dimension n, et $f : \partial M_2 \to \partial M_1$ un homéomorphisme, on définit le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ comme l'espace topologique quotient de l'union disjointe $M_1 \amalg M_2$ par la relation d'équivalence engendrée par $x_2 \sim f(x_2)$ pour tout $x_2 \in \partial M_2$.

Un collier pour une variété à bord M est un plongement $(]-1,0] \times \partial M, \{0\} \times M) \to (M, \partial M)$.

Théorème 1.4.5 (Brown). *Toute variété topologique à bord admet un collier.*

L'énoncé de Brown comporte l'hypothèse *métrisable*. Pour un espace séparé localement euclidien, paracompact équivaut à métrisable.

Théorème 1.4.6. *a) Le recollement $M = M_1 \cup_f M_2$ de deux variété topologiques de dimension n le long de leur bord est une variété topologique de dimension n.*
b) Si M_1 et M_2 sont lisses, alors M admet une structure lisse qui étend celle de M_1 et M_2, unique à difféomorphisme près de support un voisinage arbitraire du lieu de recollement.

Remarque 1.4.7. Si M_1 et M_2 sont différentiables, une paire de colliers différentiables détermine une structure lisse précise sur le recollement M. Des colliers de classe C^k différents produisent des variétés C^k difféomorphes.

1.5 Homotopie

Définition 1.5.1. Une homotopie entre deux applications continues $f, g : X \to Y$ est une application continue

$$\begin{array}{rrcl} h : & [0,1] \times X & \to & Y \\ & (t,x) & \mapsto & h(t,x) = h_t(x) \end{array}$$

telle que : $h_0 = f$ et $h_1 = g$.

L'existence d'une homotopie est une relation d'équivalence et la composition est bien définies sur les classes d'homotopie.

Définition 1.5.2. Une équivalence d'homotopie entre deux espaces est une application continue qui est inversible comme classe d'homotopie ; les deux espaces sont dits homotopiquement équivalents.
Une espace est contratile si et seulement s'il est homotopiquement équivalent à un point.

Définition 1.5.3. Une rétraction par déformation d'un espace X sur un sous-espace A est une homotopie h entre l'identité de X et une rétraction de X sur A :
$\forall x \in X \; h(0, x) = x$,
$\forall x \in X \; h(1, x) \in A$,
$\forall a \in A \; h(1, a) = a$.

Dans le cas où la dernière condition est vrai pour tout (t, a) :
$\forall t \in [0, 1]$, $\forall a \in A \; h(t, a) = a$, on parle de rétraction par déformation forte.

Les groupes d'homologie que nous allons étudier, comme les groupes d'homotopie sont invariants par équivalence d'homotopie. Utiliser de façon pertinente les rétractions par déformation sera très utile pour le calcul.

1.6 Catégories

Définition 1.6.1. Une catégorie $\mathcal{C}$ est une structure algébrique formée par :
a) une *classe* d'objets,
b) pour chaque couple d'objets X et Y, un ensemble de morphismes $Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ (ou simplement $\mathcal{C}(X, Y)$, c) pour chaque triplet d'objets X, Y, Z, une composition

$$Hom_{\mathcal{C}}(Y, Z) \times Hom_{\mathcal{C}}(X, Y) \to Hom_{\mathcal{C}}(X, Z) ,$$

vérifiant l'associativité de la composition et l'existence d'un morphisme identité $1_X \in Hom_{\mathcal{C}}(X, X) = End_{\mathcal{C}}(X)$, pour tout objet X.

Un isomorphisme est un morphisme inversible à gauche et à droite.

Exemple 1.6.2.

1. Les espaces topologiques avec les applications continues forment une catégorie notée Top.
2. Les espaces topologiques avec les classes d'homotopie d'applications continues forment une catégorie notée hTop.
3. Les groupes, les groupes abéliens, les groupes abéliens gradués ... avec leurs morphismes forment des catégories.

Définition 1.6.3. Un foncteur covariant F (resp. contravariant) de la catégorie $\mathcal{C}$ vers la catégorie $\mathcal{C}'$ associe à chaque objet X de $\mathcal{C}$ un objet $F(X)$ de $\mathcal{C}'$, et à chaque morphisme $g \in Hom_{\mathcal{C}}(X, Y)$ un morphisme $F(g) \in Hom_{\mathcal{C}}(F(X), F(Y)$ (resp. $F(g) \in Hom_{\mathcal{C}}(F(Y), F(X)$ compatible avec la composition et respectant les morphismes identités.

L'homologie que nous allons étudier est un foncteur H de la catégorie Top (en fait hTop) vers la catégorie des groupes abéliens $\mathbb{Z}$-gradués. Il associe à chaque espace topologique X un groupe abélien gradué $H(X) = \oplus_n H_n(X)$, et à chaque application continue un morphisme de groupes abéliens gradués (homogène de degré 0). Les groupes sont triviaux en degré $n < 0$.

Donnons un exemple d'utilisation : Pour $m \geq 1$, $H_n(D^{m+1})$ est trivial pour $n > 0$, et $H_m(S^m) \approx \mathbb{Z}$. On déduit qu'il n'existe pas de rétraction de D^{m+1} sur S^m.