

Chapitre 2

L'homologie singulière

2.1 Les groupes d'homologie d'un espace topologique

Le simplexe standard Δ_n est l'enveloppe convexe de la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$:

$$\Delta_n = \{(t_0, \dots, t_n), \forall i \ t_i \geq 0, \sum_i t_i = 1\} .$$

Définition 2.1.1. Un simplexe singulier de dimension n dans l'espace topologique X est une application continue $\sigma : \Delta_n \rightarrow X$.

Pour $0 \leq i \leq n$, la face d'indice i , F_i^n , de Δ_n est le simplexe singulier de dimension $n - 1$ défini par :

$$F_i^n(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1}) .$$

On notera au besoin ce simplexe par la suite ordonnée de ses sommets : $(e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, e_n)$. Ici $(e_0, \dots, e_n)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^{n+1}$, et le chapeau signifie que e_i est enlevé de la suite. Cette notation pourra être utilisée pour les simplexes singuliers linéaires.

Avec cette notation, on a :

$$\forall i < j, \ F_j^{n+1} \circ F_i^n = (e_0, \dots, \widehat{e_i}, \dots, \widehat{e_j}, \dots, e_{n+1}) = F_i^{n+1} \circ F_{j-1}^n .$$

Soit X une espace topologique. Pour $n \geq 0$, le groupe des chaînes singulières de dimension n est le groupe abélien libre $C_n(X)$ de base les simplexes singuliers de dimension n à valeur dans X . On définit pour $n \geq 1$, une *application bord* :

$$\partial_n : C_n(X) \rightarrow C_{n-1}(X) ,$$

en étendant linéairement la formule donnée pour un simplexe σ de dimension $n \geq 1$ par :

$$\partial_n \sigma = \sum_{i=0}^n (-1)^i \sigma \circ F_i^n .$$

Pour $n = 0$, $\partial_0 : C_0(X) \rightarrow C_{-1}(X) = \{0\}$ est l'application nulle.

Proposition 2.1.2. *Pour tout $n \geq 0$, $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.*

Définition 2.1.3. Un complexe de chaînes $C = (C_n, \partial_n)$ est une suite de groupes abéliens (C_n) et une suite de morphismes $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ vérifiant pour tout n , $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$.

Etant donné un complexe de chaîne $C = (C_n, \partial_n)$, on définit son homologie :

$$H_n(C) = \frac{Z_n(C)}{B_n(C)} ,$$

où $Z_n(C) = \text{Ker}(\partial_n)$ est le sous-groupe des cycles, et $B_n(C) = \text{Im}(\partial_{n+1})$ est le sous-groupe des bords.

Définition 2.1.4. L'homologie singulière d'un espace topologique X est l'homologie du complexe des chaînes singulières :

$$H_n(X) = \frac{Z_n(X)}{B_n(X)} .$$

Exercice 2.1.5. Calculer l'homologie d'un point.

Le groupe $C_0(X)$ s'identifie au groupe abélien libre de base X .

Proposition 2.1.6. *Si X est connexe par arc , alors $H_0(X) \approx \mathbb{Z}$.*

2.2 Fonctorialité

Définition 2.2.1. Un morphisme entre les complexes de chaînes $C = (C_n, \partial_n)$ et $C' = (C'_n, \partial'_n)$ est une suite de morphismes $g_n : C_n \rightarrow C'_n$ qui commutent avec les bords : pour tout n : $\partial'_n \circ g_n = g_{n-1} \circ \partial_n$.

Une suite de groupes abéliens (ou la somme directe de ceux-ci) est appelée *un groupe abélien gradué*; l'indice est appelé *degré*. Au besoin on étend l'indexation au groupe $\mathbb{Z}$ en considérant des groupes nuls en degré négatif. L'homologie définit un foncteur de la catégorie des complexes de chaînes vers la catégorie des groupes abéliens gradués.

A une application continue $f : X \rightarrow Y$, on associe la suite $C = (C_n(f))$ de morphismes :

$$\begin{array}{ccc} C_n(f) : C_n(X) & \rightarrow & C_n(Y) \\ & \sigma \mapsto & f \circ \sigma \end{array}$$

Proposition 2.2.2. *Pour tout application continue f , $C(f)$ est un morphisme de complexes de chaînes et on obtient ainsi un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des complexes de chaînes.*

Corollaire 2.2.3. *L'homologie singulière définit un foncteur de la catégorie des espaces topologiques vers la catégorie des groupes abéliens gradués.*

Pour une application continue $f : X \rightarrow Y$, on note généralement $f_* : H_n(X) \rightarrow H_n(Y)$ l'application induite en homologie. Un homéomorphisme induit un isomorphisme en homologie : les groupes d'homologie sont des *invariants topologiques*.

2.3 Exactitude

On étend le foncteur homologie singulière à la catégorie $Top(2)$ des paires d'espaces (X, Y) , $Y \subset X$, les morphismes étant des applications continues dont la restriction est bien définie. Un espace topologique $X = (X, \emptyset)$ peut être considéré comme une paire, i.e. un objet de $Top(2)$.

$$C(X, Y) = \frac{C(X)}{C(Y)}, H(X, Y) = H(C(X, Y)) .$$

Théorème 2.3.1. *Le bord induit une application bien définie $\partial_n : H_n(X, Y) \rightarrow H_{n-1}(Y)$. Ce morphisme est naturel (i.e. commute avec les morphismes induits par les applications continues) et donne lieu à une suite exacte longue :*

$$\cdots \rightarrow H_n(Y) \rightarrow H_n(X) \rightarrow H_n(X, Y) \rightarrow H_{n-1}(Y) \rightarrow \cdots$$

où les deux premiers morphismes sont induits par les inclusions.

2.4 Propriétés de l'homologie singulière

2.4.1 Additivité

On rappelle que $\pi_0(X)$ est l'ensemble des composantes connexes par arcs de l'espace topologique X .

Théorème 2.4.1. *a) Soit X un espace topologique. Pour tout n ,*

$$H_n(X) = \bigoplus_{Y \in \pi_0(X)} H_n(Y) .$$

b) Soit $(X_\alpha)_{\alpha \in A}$ une famille d'espaces topologiques, pour tout n ,

$$H_n(\coprod_{\alpha \in A} X_\alpha) = \bigoplus_{\alpha \in A} H_n(X_\alpha) .$$

Corollaire 2.4.2. *Pour tout espace topologique X , $H_0(X)$ s'identifie au groupe abélien libre de base $\pi_0(X)$.*

2.4.2 Homotopie

Théorème 2.4.3. *Des applications continues homotopes induisent des isomorphismes en homologie.*

Corollaire 2.4.4. *Un équivalence d'homotopie induit un isomorphisme en homologie.*

2.4.3 Excision

Théorème 2.4.5. *Soit (X, Y) une paire d'espace. Si l'adhérence de U est contenue dans l'intérieur de Y , alors l'inclusion de $(X - U, Y - U) \subset (X, Y)$ induit un isomorphisme en homologie.*

Corollaire 2.4.6 (Mayer-Vietoris). *On suppose que l'espace topologique X est la réunion des intérieurs des sous-espaces A et B . Il existe une suite exacte longue :*

$$\cdots \rightarrow H_n(A \cap B) \xrightarrow{(i_A)_* \oplus (i_B)^*} H_n(A) \oplus H_n(B) \xrightarrow{(j_A)_* + (j_B)^*} H_n(X) \xrightarrow{d_*} H_{n-1}(A \cap B) \rightarrow \cdots ,$$

où les premières applications sont induites par les inclusions, et d_* est la composition de l'application d'inclusion $X \rightarrow (X, B)$, de l'isomorphisme d'excision $H_n(X, B) \simeq H_n(A, A \cap B)$ et du bord $H_n(A, A \cap B) \rightarrow H_{n-1}(B)$.

Bibliographie

[test] ...