Chapitre 3

Homologie : calcul et applications

3.1 Homologie des sphères

Théorème 3.1.1. *Pour $n \geq 1$:*
a)$H_k(S^n) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } k = 0 \textit{ ou } k = n\,; \\ \{0\} & \textit{sinon.} \end{cases}$
b)$H_k(D^n, S^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \textit{si } k = n\,; \\ \{0\} & \textit{sinon.} \end{cases}$
c) Le bord $\partial_{n+1} : H_n(D^{n+1}, S^n) \to H_n(S^n)$ est un isomorphisme.

Théorème 3.1.2. *Pour $n \geq 2$, les groupes isomorphes $H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n) \approx H_{n-1}(\dot{\Delta}_n)$ sont engendrés respectivement par la classe de l'identité de Δ_n : $[i_n]$ et par son bord $[\partial i_n]$.*

Pour $n \geq 2$, un homéomorphisme entre S^{n-1} et $\dot{\Delta}_n$ fixe le choix d'un générateur de $H_{n-1}(S^{n-1})$. On peut aussi fixer ce choix via un générateur de l'homologie locale

$$H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\}) \approx H_n(D^n, S^{n-1}) \approx H_{n-1}(S^{n-1}) \ .$$

Notons ω_n l'isobarycentre du simplexe Δ_n, enveloppe convexe de la base $(e_0, \ldots, e_{n+1})$ de $\mathbb{R}^{n+1}$. Le repère $(\omega; e_1, \ldots, e_n)$ fixe un isomorphisme entre $\mathbb{R}^n$ et l'hyperplan $\Pi_n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ qui contient Δ_n. L'homologie locale $H_n(\Pi_n, \Pi_n - \{\omega_n\}) \approx H_n(\Delta_n, \dot{\Delta}_n)$ est engendré par $[\partial i_n]$. L'isomorphisme fixe le choix du générateur de $H_n(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n - \{0\})$ et donc celui de $H_n(D^n, S^{n-1}) \approx H_{n-1}(S^{n-1})$. Au besoin on notera $[D^n] \in H_n(D^n, S^{n-1})$ et $[S^{n-1}] \in H_{n-1}(S^{n-1})$ les *classes fondamentales* ainsi fixés. Ici le vocabulaire et la notation anticipent sur ce qui sera fait plus généralement avec l'orientation des variétés.

Homologie réduite

Le complexe singulier réduit $\widetilde{C}(X)$ est défini par :
$\widetilde{C}_n(X) = C_n(X)$ pour $n \neq -1$, $\widetilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z}$, $\widetilde{\partial}_n = \partial_n$ pour $n > 0$, et

$\widetilde{\partial}_0 : \widetilde{C}_0(X) = C_0(X) \to \widetilde{C}_{-1}(X) = \mathbb{Z} \approx C_0(pt)$ est l'augmentation (induite par l'application constante).

On peut reformuler avec l'homologie réduite les résultats précédents :

$$\forall n \geq 1 \;\; H_*(D^n, S^{n-1}) \simeq \widetilde{H}_*(S^{n-1}) \simeq \begin{cases} \mathbb{Z} & \text{si } k = n\,; \\ \{0\} & \text{sinon.} \end{cases}$$

3.2 Premières applications

Théorème 3.2.1 (Invariance de la dimension)**.** *Pour $n \neq m$, $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ ne sont pas homéomorphes.*

Proposition 3.2.2 (Caractérisation du bord)**.** *Soient M une variété à bord de dimension n et x un point de M, alors :*
$x \in M - \partial M \iff H_n(M, M - x) \simeq \mathbb{Z}$,
$x \in \partial M \iff H_n(M, M - x) \simeq \{0\}$.

Corollaire 3.2.3. *Si on a une carte locale en x :*

$$\phi : (U, x) \to (V, \phi(x)),\;\; V \subset]-\infty, 0] \times \mathbb{R}^{n-1}\;,$$

alors x est dans le bord de M si et seulement si $\phi(x)$ appartient à $\{0\} \times \mathbb{R}^{n-1}$.

Théorie du degré

Définition 3.2.4. Soit $n \geq 1$. Une application continue $f : S^n \to S^n$ induit un endomorphisme f_* de $H_n(S^n) \approx \mathbb{Z}$. Le degré de f est défini par :

$$\forall z \in H_n(S^n)\;,\; f_*(z) = \deg(f)\; z\;.$$

Proposition 3.2.5. *Le degré d'une isométrie $f \in O_n(\mathbb{R})$ est égal à son déterminant.*

Corollaire 3.2.6. *Pour n pair, l'application antipode, $-Id_{S^n}$, n'est pas homotope à l'identité.*

Corollaire 3.2.7. *Pour toute application continue $f : S^n \to S^n$, n pair, il existe $x \in S^n$ tel que $f(x) = \pm x$.*

Corollaire 3.2.8. *Pour $n > 0$ pair, il n'existe pas de champ de vecteurs tangents non nuls sur la sphère S^n, c'est à dire il n'existe pas d'application continue $X = [x \to X_x]$ de S^n dans $\mathbb{R}^{n+1} - \{0\}$ avec X_x orthogonal à x pour tout x.*

Définition 3.2.9. a) L'application $f : S^n \to S^n$ est un homéomorphisme local en x si et seulement si sa restriction à un voisinage de x est un homéomorphisme sur son image. b) On dit que x est un point (topologiquement) régulier (ou que f est régulière en x) si et seulement si f est un homéomorphisme local en x, et que y est une valeur régulière si et seulement si tout antécédent de y est un point régulier.

Lorsque x est un point régulier de f d'image y, alors une restriction $f_| : U \to U'$ qui est un homéomorphisme local définit, en composant avec l'excision, un homomorphisme $f_* : H_n(S^n - \{x\}) \to H_n(S^n - \{y\})$, qui est indépendant de U. En prenant comme générateurs des homologies locales $\mu_x \in H_n(M - \{x\})$ et $\mu_y \in H_n(M - \{y\})$, *restriction* du générateur choisi $\mu \in H_n(S^n)$, appelés générateurs orientés, on obtient la multiplication par un entier.

Définition 3.2.10. Le degré local en un point régulier de f est défini par : $f_*(\mu_x) = \deg_x(f)\mu_y$, où $\mu_x \in H_n(M - \{x\})$ et $\mu_y \in H_n(M - \{y\})$ sont les générateurs orientés.

Théorème 3.2.11. *Si y est une valeur régulière de $f : S^n \to S^n$, alors y a un nombre fini d'antécédents, et :*

$$\deg(f) = \sum_{x \in f^{-1}(y)} \deg_x(f) \ .$$

Proposition 3.2.12. *S'il existe des cartes locales*

$$\phi : (U, x) \to (V, 0) \ , \psi : (U', x) \to (V', 0) \ ,$$

compatibles avec les générateurs orientés dans lesquelles l'expression de $f : S^n \to S^n$ est un difféomorphisme, alors le degré local est donné par le signe du déterminant jacobien.

3.3 Homologie des variétés et orientation

Définition 3.3.1. Une orientation d'une variété topologique M est une famille *continue* de générateurs de l'homologie locale : $\mu_x \in H_n(M, M - x)$, $x \in M - \partial M$.

Ici *continue* signifie que pour tout $x \in M - \partial M$, il existe un voisinage V et $\mu_V \in H_n(M, M - V)$ tel que, pour tout $y \in V$, $\rho_y(\mu_V) = \mu_y$. Ici le morphisme *de restriction* ρ_y est induit par l'inclusion $(M, M - V) \to (M, M - x)$.

Exercice 3.3.2. Définir sur l'ensemble des générateurs des homologies $H_n(M, M - x)$, $x \in M - \partial M$ une topologie qui en fait un revêtement double $P \to M - \partial M$ et montrer que la condition précédente définit une section continue de ce revêtement.

Exemples 3.3.3. 1. Pour tout n, l'espace $\mathbb{R}^n$ est orienté avec la famille μ_x obtenue en utilisant la translation $t_x : \mu_x = (t_x)(\mu_0)$.

2. Pour tout $n > 0$, la sphère S^n est orientée par $\mu_x = \rho_x(\mu)$, où μ est générateur de $H_n(S^n)$, et ρ_x est induit par l'inclusion.

Proposition 3.3.4. *Une variété M est orientable si et seulement s'il existe un* atlas, *c'est dire un ensemble de cartes dont les domaines recouvrent M, dont les changements de carte respecte l'orientation de $\mathbb{R}^n$.*

Théorème 3.3.5. *Pour toute variété topologique de dimension n, M, et tout compact $K \subset M - \partial M$,*
a) $H_k(M, M-K)$ est nul pour tout $k > n$;
b) $z \in H_n(M, M-K)$ est nulle si et seulement si, pour tout $x \in K$, $\rho_x(z) = 0$.

Remarque 3.3.6. Dans b), la nullité ou non de $\rho_x(z)$ est localement constant, il suffit donc de tester un point x pour chaque composante connnexe de K.

Théorème 3.3.7. *Soit (M, μ) une variété orientée. Pour tout compact $K \subset M - \partial M$, il existe $\mu_k \in H_n(M, M-K)$ tel que : $\forall x \in K$, $\rho_x(\mu_K) = \mu_x$.*

Pour K variété compacte sans bord, la classe $\mu_M = [M]$ est appelée la classe fondamentale de M.

Théorème 3.3.8. *Soit M est une variété compacte connexe sans bord.*
a) M est orientable si et seulement si $H_n(M)$ est non nul. b) M est orientable si et seulement si $H_n(M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et la classe fondamentale donne une bijection entre les orientatons de M et les générateurs de $H_n(M)$.

Cas à bord

Proposition 3.3.9. *Soit (M, μ) une variété compacte orientée à bord, alors il existe $[M] \in H_n(M, \partial M)$ tel que, pour tout $x \in M - \partial M$, $\rho_x([M]) = \mu_x$.*

Pour K variété compacte à bord, la classe $\mu_M = [M] \in H_n(M, \partial M)$ est aussi appelée la classe fondamentale de M.

Théorème 3.3.10. *Soit M est une variété compacte connexe à bord.*
a) M est orientable si et seulement si $H_n(M, \partial M)$ est non nul. b) M est orientable si et seulement si $H_n(M, \partial M)$ est isomorphe à $\mathbb{Z}$, et la classe fondamentale donne une bijection entre les orientatons de M et les générateurs de $H_n(M)$.

Exercice 3.3.11. Montrer que si M est une variété compacte orientée à bord de classe fondamentale $[M]$, alors $\partial[M] \in H_{n-1}(\partial M)$ définit une orientation de ∂M.

3.4 Limites directes/inductives, limite inverse

3.5 Le théorème du complémentaire et ses appplications