Chapitre 10

Représentations des groupes finis et théorie des caractères

10.1 Exemples

On rappelle qu'une représentation d'un groupe G est un morphisme du groupe G vers un groupe linéaire GL(V) où V est un espace vectoriel sur un corps $\mathbf{k}$. On dira $\mathbf{k}$-représentation pour préciser le corps. On dit que la représentation est *fidèle* lorsque le morphisme est injectif. Une représentation sur le $\mathbf{k}$-espace vectoriel V équivaut à une structure de $\mathbf{k}[G]$-module sur V. La dimension de V est appelée le degré de la représentation. On n'étudie ici que les représentations de degré fini.

Groupe cyclique d'ordre m

Pour $m \geq 2$, soit $C_m =< a; a^m >$ le groupe cyclique d'ordre m. Un représentation $\rho : C_m \to \mathrm{GL_n}(\mathbf{k}) = \mathrm{GL}(\mathbf{k}^n)$ est définie par

$$\rho(a^i) = A^i \ ,$$

où A est une matrice telle que $A^m = I$.
Deux représentations correspondant aux matrices A et A' sont isomorphes si et seulement si les matrices A et A' sont semblables.
Les représentations de degré 1 sont en bijection avec les racines m-ièmes de l'unité dans le corps $\mathbf{k}$. Elles sont irréductibles.

Proposition 10.1.1. *Toute représentation du groupe cyclique C_m de dimension finie sur le corps des complexes est somme directe de représentations de degré* 1.

Groupe symétrique $\mathcal{S}_3$

Notons $r = (123)$, $s = (12)$. Le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ est isomorphe au groupe de présentation $\langle r, s; r^3, s^2, rsrs \rangle$. Une représentation $\rho : \mathcal{S}_3 \to GL_n(\mathbf{k})$ est définie par deux matrices inversibles $\rho(r) = R$, $\rho(s) = S$, qui satisfont les relations

$$R^3 = S^2 = (RS)^2 = I \ .$$

Pour $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ et $n = 2$, $R = \begin{pmatrix} j & 0 \\ 0 & j^2 \end{pmatrix}$, et $S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ conviennent et définissent une représentation de degré 2 irréductible.

10.2 Réductibilité et lemme de Schur

Théorème 10.2.1 (Maschke)**.** *Soit G un groupe fini et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une $\mathbf{k}$-représentation de degré fini. Si la caractéristique du corps de base $\mathbf{k}$ est nulle ou ne divise pas l'ordre de G, alors pour tout sous-module W il existe un sous-module W' telle que $W \oplus W' = V$ (sous-module complémentaire).*

Corollaire 10.2.2. *Soit G un groupe fini et $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une représentation de degré fini. Si la caractéristique du corps de base $\mathbf{k}$ est nulle ou ne divise pas l'ordre de G, alors V est semi-simple (complètement réductible).*

Lemme 10.2.3 (de Schur)**.** *Soient V et V' deux $\mathbf{k}$-représentations irréductibles d'un groupe fini G.*
a) Si $T : V \to V'$ est $\mathbf{k}[G]$-linéaire, alors soit T est nulle, soit T est un isomorphisme.
b) Si $\mathbf{k}$ est un corps algébriquement clos, alors toute application $\mathbf{k}[G]$-linéaire $T : V \to V$ est un multiple de l'identité :

$$\mathrm{End}_{\mathbf{k}[G]}(V) = \mathbf{k}\,\mathrm{Id} \ .$$

Exercice 10.2.4. Montrer que si V est un $\mathbf{k}[G]$-module pour lequel tout $\mathbf{k}[G]$-endomorphisme est multiple de l'identité, alors V est simple.

Exercice 10.2.5. Montrer que si G est un groupe abélien fini, toute représentation irréductible de degré fini de G est de degré 1.

10.3 Caractères

Définition 10.3.1. Soit $\rho : G \to V$ une $\mathbf{k}$-représentation de degré fini. Le caractère de V est la fonction :

$$\begin{array}{rccl} \chi_V : & G & \to & \mathbf{k} \\ & g & \mapsto & \mathrm{Tr}(\rho(g)) \end{array}$$

Proposition 10.3.2. *a)* $\chi_V(e) = \dim(V)$.
b) $\forall (g,h) \in G^2\ ,\ \chi_V(ghg^{-1}) = \chi_V(h)$.

Proposition 10.3.3. *Pour* $\mathbf{k} = \mathbb{C}$,
c) $\forall g \in G$ $\chi_V(g)$ *est somme de racines de l'unité (les valeurs propres de* $\rho(g)$*).*
d) $\forall g \in G\ ,\ \chi_V(g^{-1}) = \overline{\chi_V(g)}$.

Définition 10.3.4. Une fonction $f \in \mathbb{C}^G$ est centrale si et seulement si elle est constante sur les classes de conjugaison (propriété b).

Proposition 10.3.5. *Les fonctions centrales forment un espace vectoriel* $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ *dont la dimension est le nombre de classes de conjugaison.*

L'espace $\mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ des fonctions centrales est muni du produit scalaire hermitien :

$$< u, v >= \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} u(g)\overline{v(g)}\ .$$

Théorème 10.3.6 (Orthogonalité des caractères)**.**
a) Deux $\mathbb{C}$*-représentations irréductibles non isomorphes* V *et* V' *d'un groupe fini* G *ont des caractères orthogonaux :* $< \chi_V, \chi_{V'} >= 0$
b) Le caractère d'une $\mathbb{C}$*-représentation irréductible* V *est unitaire :* $< \chi_V, \chi_V >= 1$.

Corollaire 10.3.7. *Il n'y a qu'un nombre fini de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes.*

On a vu qu'une représentation de degré fini du groupe fini G se décompose en somme directe de représentations irréductibles :

$$W \simeq V_1^{\oplus m_1} \oplus \cdots \oplus V_\nu^{\oplus m_\nu}\ .$$

où les V_j sont des représentations irréductibles deux à deux non isomorphes. Les m_j sont appelés les multiplicités ; ils sont déterminés par le caractère : $m_j =< \chi_W, \chi_{V_j} >$.

Corollaire 10.3.8. *Deux représentations sont isomorphes si et seulement si elles ont le même caractère.*

10.4 Construction de représentations

Soit $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ une $\mathbf{k}$-représentation du groupe G, alors la représentation duale est :

$$\begin{array}{rccc} \rho^* : & G & \to & \mathrm{GL}(V^*) \\ & g & \mapsto & {}^t\rho(g^{-1}) \end{array}$$

Exercice 10.4.1. a) Vérifier que ρ^* est une représentation.
b) Expliciter la représentation $\rho^* \otimes \rho$.
c) Montrer que si $\mathbf{k}$ est muni de la représentation triviale (constante), alors l'évaluation $e : V^* \otimes V \to \mathbf{k}$ est $\mathbf{k}[G]$-linéaire.

Proposition 10.4.2. *Le caractère de la $\mathbb{C}$-représentation duale de V est :*

$$\chi_{V^*} = \overline{\chi_V} \ .$$

Lemme 10.4.3. *Etant donné deux espaces vectoriels de dimensions finis V et V', on a un isomorphisme canonique :*

$$V^* \otimes V' \simeq \mathrm{Hom}(V, V') \ .$$

Il en résulte que si $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$ et $\rho' : G \to \mathrm{GL}(V')$ sont deux représentations de degrés finis, alors $\rho^* \otimes \rho'$ définit une représentation sur l'espace $\mathrm{Hom}(V, V')$ de caractère $\overline{\chi_V}\chi_{V'}$.

10.5 Formule de projection

Définition 10.5.1. Etant donné un $\mathbf{k}[G]$-module V, l'espace des invariants est le sous-espace vectoriel V^G des vecteurs invariants sous l'action de tous les éléments du groupe G.

Proposition 10.5.2. *Si V est un $\mathbf{k}[G]$-module, l'endomorphisme $p_1 = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho(g)$ est $\mathbf{k}[G]$-linéaire. C'est un projecteur d'image V^G.*

Corollaire 10.5.3.

$$\dim(V^G) = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_V(g) \ .$$

La preuve du théorème d'orthogonalité des caractères est conséquence de cette proposition et du lemme qui suit.

Lemme 10.5.4.

$$\mathrm{Hom}(V, V')^G = \mathrm{Hom}_{\mathbf{k}[G]}(V, V') \ .$$

10.6 La représentation régulière

Définition 10.6.1. La représentation régulière du groupe G est l'espace $R = \mathbf{k}[G]$ muni de la représentation qui étend la translation à gauche.

Proposition 10.6.2. *On a : $\chi_R(g) = 0$ pour $g \neq e$, et $\chi_R(e) = |G|$.*

Corollaire 10.6.3. *Si V est une $\mathbb{C}$-représentation irréductible du groupe fini G, alors la multiplicité de V dans la représentation régulière est le degré de V.*

Il en résulte une formule pour les dimensions d_i des représentations irréductibles deux à deux non isomorphes :

$$|G| = \sum_i d_i^2 \ .$$

Théorème 10.6.4. *Les caractères des $\mathbb{C}$-représentations irréductibles du groupe fini G forment une base othonormée de l'espace des fonctions centrales, ce qui veut dire que le nombre de représentations irréductibles deux à deux non isomorphes est égal au nombre de classes de conjugaison.*

Démonstration. Soit $\alpha \in \mathcal{C}(G, \mathbb{C})$ une fonction centrale sur le groupe fini G orthogonale à tous les caractères irréductibles. Il s'agit de montrer que α est nulle. Pour une représentation $\rho : G \to \mathrm{GL}(V)$, on définit :

$$p_{\alpha,V} = \frac{1}{|G|} \sum_g \alpha(g)\rho(g) \ .$$

On vérifie que pour tout $h \in G$, $p_{\alpha,V}$ commute avec $\rho(h)$: $p_{\alpha,V} \in \mathrm{End}_{\mathbb{C}[G]}(V)$. Dans le cas où V est irréductible, le lemme de Schur nous donne $p_{\alpha,V} = \lambda\,\mathrm{Id}$. On calcule :

$$\lambda \dim(V) = \mathrm{Tr}(p_{\alpha,V}) = \frac{1}{|G|} \sum_g \alpha(g)\chi_V(g) =< \alpha, \chi_{V^*} >= 0 \ .$$

En utilisant la décomposition en irréductibles, on obtient que $p_{\alpha,W}$ est nulle pour toute représentation de degré fini. Avec la représentation régulière R, les translations à gauche sont linéairement indépendantes dans $GL(R)$, donc tous les $\alpha(g)$ sont nuls. □