# Chapitre 3

# Séparabilité

## 3.1 Polynômes et extensions séparables

**Définition 3.1.1.** a) Soit $K$ un corps commutatif. Un polynôme irréductible $P \in K[X]$ est séparable sur $K$ si et seulement s'il n'a pas de racine multiple dans son corps de décomposition.
b) Un polynôme $P \in K[X]$ est séparable sur $K$ si et seulement si ses facteurs irréductibles sont séparables. Dans le cas contraire, on dit que $P$ est inséparable.

**Proposition 3.1.2.** *a) Si $K$ est de caractéristique nulle, un polynôme irréductible de $K[X]$ est toujours séparable.*
*b) Si $K$ est de caractéristique $p > 0$, un polynôme irréductible de $K[X]$ est inséparable si et seulement s'il appartient à $K[X^p]$.*

*Exercice* 3.1.3. Soit $K$ un corps de caractéristique non nulle $p$.

1. Montrer que si $b$ n'a pas de racine $p$-ième dans $K$, alors $X^p - b$ est irréductible sur $K$.
2. Montrer que si $b$ n'a pas de racine $p$-ième dans $K$, alors pour tout $k > 0$ $X^{p^k} - b$ est irréductible sur $K$.
3. Montrer que le polynôme $X^p - y$ est inséparable sur le corps de fractions rationnelles $K = \mathbb{F}_p(y)$.

**Définition 3.1.4.** Soit $f : K \to L$ une extension algébrique (tout élément de $L$ est algébrique sur $K$).
a) Un élément $\alpha \in L$ est séparable si et seulement si son polynôme minimal est séparable.
b) L'extension est séparable si et seulement si tous les éléments de $L$ sont séparables.

**Proposition 3.1.5.** *Soit $k \to K \to L$ une tour d'extensions. Si $k \to L$ est séparable, alors $k \to K$ et $K \to L$ sont séparables.*

30/09/2011

## 3.2 Corps parfaits

**Définition 3.2.1.** Un corps $K$ est parfait si et seulement si toute extension algébrique est séparable.

*Remarque* 3.2.2. Tout corps de caractéristique zéro est parfait.

On rappelle que sur un corps $K$ de caractéristique $p > 0$, l'application :

$$\begin{array}{ccc} K & \to & K \\ x & \mapsto & x^p \end{array}$$

est un homomorphisme, appelé homomorphisme de Frobenius. Comme homomorphisme de corps, il est toujours injectif. Pour un corps fini, cet homomorphisme est surjectif.

**Théorème 3.2.3.** *Un corps de caractéristique non nulle est parfait si et seulement si son homomorphisme de Frobenius est surjectif.*

*Exercice* 3.2.4. Soit $K$ un corps de caractéristique non nulle $p$.

1. Montrer que si $b$ n'a pas de racine $p$-ième dans $K$, alors $X^p - b$ est irréductible sur $K$.
2. Montrer que si $b$ n'a pas de racine $p$-ième dans $K$, alors pour tout $k > 0$ $X^{p^k} - b$ est irréductible sur $K$.

## 3.3 Séparabilité et morphismes

Etant donné deux extensions $f : k \to K$ et $g : k \to L$, on s'intéresse au cardinal de l'ensemble $Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L)$ des morphismes de $k$-algèbre de $K$ dans $L$. On utilisera la notation plus précise $Hom_{(k,f)-\mathrm{alg}}(K, L)$ en cas d'ambiguïté.

**Proposition 3.3.1.** *Soient $f : k \to K$ et $g : k \to L$ deux extensions de $k$. Si $K$ est une extension simple : $K = k(\alpha)$, alors l'application $[h \mapsto h(\alpha)]$ définit une bijection entre $Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L)$ et l'ensemble des racines du polynôme minimal $P_\alpha$ dans $L$.*
*En particulier : $\sharp Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L) \leq [K : k]$.*

**Théorème 3.3.2.** *Soit $f : k \to K$ une extension de degré fini.*
*a) Pour tout extension $g : k \to L$, $\sharp Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L) \leq [K : k]$.*
*b) Si l'extension $f : k \to K$ est séparable et si $g : k \to L$ est une extension algébriquement close, alors $\sharp Hom_k(K, L) = [K : k]$.*
*c) S'il existe une extension $g : k \to L$ telle que : $\sharp Hom_{k-\mathrm{alg}}(K, L) = [K : k]$, alors l'extension $f : k \to K$ est séparable.*

**Lemme 3.3.3** (Transitivité)**.** *Soient $f : k \to K$ et $g : K \to L$ des extensions de degré fini. Si $f$ et $g$ sont séparables, alors l'extension $g \circ f : k \to L$ est séparable.*

*Exercice* 3.3.4. Démontrer l'énoncé précédent sans l'hypothèse de degré fini.

**Théorème 3.3.5.** *Une extension de degré fini $k \to K$ est séparable si et seulement si elle est engendrée par des éléments séparables.*

## 3.4 Elément primitif

**Théorème 3.4.1.** *Toute extension $f : k \to K$ qui est séparable de degré fini est simple (i.e. admet un élément primitif).*

*Exercice* 3.4.2. Montrer que si le corps de base $k$ est infini, un $k$-espace vectoriel $E$ n'est pas réunion finie de sous-espaces propres. 05/10/2011