Chapitre 7

Introduction à la théorie des modules

7.1 Définitions de base

Soit A un anneau.

Définition 7.1.1. Un module (à gauche) sur A est un groupe abélien M muni d'une opération externe :

$$\begin{array}{rcl} A \times M & \to & M \\ (a, v) & \mapsto & a.v \end{array}$$

qui vérifie :

la double distributivité : $\forall (a, b) \in A^2 \ \forall v \in M \ (a + b).v = a.v + b.v$ et $\forall a \in A \ \forall (v, w) \in M^2 \ a.(v + w) = a.v + a.w$;

l'associativité mixte : $\forall (a, b) \in A^2 \ \forall v \in M \ a.(b.v) = (ab).v$;

l'action du neutre : $\forall v \in M \ 1.v = v$.

Un module sur un corps est un espace vectoriel.

Exemples 7.1.2.

1. Un anneau A est un module sur lui-même ; une algèbre sur A est aussi un module.
2. Un groupe abélien est un module sur $\mathbb{Z}$.

Définition 7.1.3. Un sous-module d'un A-module M est un sous-groupe abélien qui est stable pour l'opération externe.

Remarque 7.1.4. Les sous-modules de l'anneau A, vu comme module à gauche sur lui-même sont les idéaux à gauche.

L'intersection d'une famille de sous-modules est un sous-module, et on a donc une notion de sous-module engendré par une partie non vide $F \subset M$: le plus petit sous-module qui contient F.

Proposition 7.1.5. *Le sous-module engendré par $F \subset M$ est l'ensemble $\mathcal{C}(F)$ des combinaisons linéaires des éléments de F.*

Définition 7.1.6. La somme (interne) d'une famille de sous-modules de M est le sous-module engendré par la réunion. On la note : $\sum\limits_{i \in I} M_i$.

Définition 7.1.7. Une application $f : M \to N$ entre les A-modules M et N est A-linéaire si et seulement si elle respecte les combinaisons linéaires :

$$\forall (a,b) \in A^2 \ \forall (v,w) \in M^2 \ f(a.v + b.w) = a.f(v) + b.f(w) \ .$$

Les applications A-linéaires de M vers N forment un module noté $\mathrm{Hom}_A(M,N)$. Les applications A-linéaires de M dans M (endomorphismes) forment une algèbre sur A, noté $\mathrm{End}_A(M)$. L'application réciproque d'un endomorphisme bijectif est linéaire : les endomorphismes bijectifs du A-module M forment un groupe noté $\mathrm{GL}_A(M)$.

Proposition 7.1.8. *Image et noyau d'une application linéaire sont des sous-modules.*

Changement d'anneau

Si B est une A-algèbre, tout B-module est aussi un A-module.

7.2 Module quotient

Proposition 7.2.1. *Soit N un sous-module d'un A-module M, alors l'opération externe induit sur le groupe abélien quotient M/N une structure de A-module.*

Proposition 7.2.2 (Factorisation d'un morphisme d'anneau)**.** *Soit $f : M \to M'$ une application linéaire, N un sous-module de M, $p : M \to M/N$ la projection* canonique*. L'application linéaire f factorise par le quotient M/N si et seulement si $N \subset \mathrm{Ker}(f)$. Le morphisme g a même image que f et est injectif si et seulement si $N = \mathrm{Ker}(f)$.*

Corollaire 7.2.3 (Premier théorème d'isomorphisme)**.** *Soit $f : M \to N$ une application linéaire, alors le quotient $M/\mathrm{Ker}(f)$ est isomorphe à l'image de f.*

Exercice 7.2.4 (Second théorème d'isomorphisme). Soient N et P deux sous-module de M. Démontrer que : $(N+P)/P$ est isomorphe à $N/N \cap P$.

Exercice 7.2.5 (Troisième théorème d'isomorphisme). Soient $P \subset N$ deux sous-modules de M. Démontrer que l'inclusion de N dans M induit une identification de N/P avec un sous-module de M/P, et que : M/N est isomorphe à $(M/P)/(N/P)$.

7.3 Modules libres et sommes directes

On note A^I la A-algèbre des applications de l'ensemble I dans A. On utilisera habituellement la notation $a = (a_i)_{i \in I}$ et le vocabulaire *famille*.
Les familles à support fini forment un sous-module noté $A^{(I)}$ (en fait un idéal de A^I) . Les élément de $A^{(I)}$ s'écrivent de manière unique comme combinaison linéaire des e_i qui prennent la valeur 1 en i et 0 ailleurs (base canonique).

Proposition 7.3.1 (Propriété universelle)**.** *Le A-module $A^{(I)}$ muni de la* base canonique $(e_i)_{i \in I}$ *vérifie la propriété universelle suivante : Pour tout A-module M, et toute famille $(b_i)_{i \in I}$ d'éléments de M, il existe une unique application linéaire $f : A^{(I)} \to M$ qui envoie chaque e_i sur b_i.*

Définition 7.3.2. Le A-module M est libre de base $(b_i)_{i \in I}$ si et seulement si l'application linéaire définie dans la proposition précédente est un isomorphisme.

Soit $(M_i)_{i \in I}$ une famille de module.

Définition 7.3.3. Le produit $\prod_{i \in I} M_i$ muni des opérations :

$$(x_i) + (y_i) = (x_i + y_i) \ , \ a.(x_i) = (a.x_i) \ ,$$

est un A-module.

Définition 7.3.4. La somme directe $\bigoplus_{i \in I} M_i$ est le sous-module du produit constitué des familles (x_i) qui n'ont qu'un nombre fini de termes non nuls (presque nulles).

7.4 Eléments de torsion

Définition 7.4.1. a) Un élément v d'un A-module M est de torsion si et seulement s'il existe $a \in A - \{0\}$ tel que $a.v = 0$.
b) Un module est de torsion si et seulement si tous ses éléments sont de torsion.

Exemples 7.4.2. 1. Dans un groupe abélien les éléments de torsion sont ceux d'ordre fini.
2. Le $\mathbb{Z}$-module $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ est de torsion.

Proposition 7.4.3. *Soit M un module sur un anneau commutatif A. L'ensemble de ses éléments de torsion forme un sous-module (de torsion)* $\mathrm{Tors}(M)$.