Chapitre 9

Eléments de théorie générale des modules

On considère dans ce chapitre des modules sur des anneaux qui ne sont pas nécessairement commutatifs.

9.1 Représentations et modules

Définition 9.1.1. Soit A une algèbre sur un corps $\mathbf{k}$, une représentation de A sur un espace vectoriel V est un morphisme de $\mathbf{k}$-algèbre :

$$\rho : A \to \mathrm{End}(V) \ .$$

Remarque 9.1.2. La représentation ρ munit V d'une structure de $\mathbf{k}$-module.

Définition 9.1.3. Soit G un groupe. Une représentation de G sur un $\mathbf{k}$-espace vectoriel V est un morphisme de groupe

$$\rho : G \to \mathrm{GL}(V) \ .$$

L'espace vectoriel de base G : $\mathbf{k}^{(G)}$ a un produit obtenu en étendant linéairement la loi de groupe de G. Le neutre e de G est élément unité. On obtient un anneau noté $\mathbf{k}[G]$, et même une $\mathbf{k}$-algèbre avec le morphisme de structure :

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{k} & \to & \mathbf{k}[G] \\ \lambda & \to & \lambda e \end{array}$$

Définition 9.1.4. L'algèbre $\mathbf{k}[G]$ est appelée l'algèbre du groupe G sur le corps $\mathbf{k}$.

Une représentation de G sur le $\mathbf{k}$-espace vectoriel V s'étend en une représentation de l'algèbre $\mathbf{k}[G]$, et donc munit V d'une structure de $\mathbf{k}[G]$-module.

9.2 Simplicité

Définition 9.2.1. Un module est simple (ou irréductible) si et seulement s'il n'admet pas de sous-module non trivial. Un module est semi-simple si et seulement s'il est somme directe de modules simples.

Remarque. Pour une représentation on dit plutôt *irréductible*.

Exercice 9.2.2. On considère la représentation du groupe symétrique $\mathcal{S}_3$ sur le $\mathbb{Q}$-espace vectoriel $V = \mathbb{Q}^3$ définie par permutation des vecteurs de base. Déterminer les sous-modules simples et montrer que la représentation est semi-simple.

9.3 Produit tensoriel de deux modules

Définition 9.3.1. Lorsque M, N et F sont trois modules sur un même anneau commutatif A, on appelle application bilinéaire une application $f : M \times N \to F$, qui est linéaire dans chacune des deux variables.

Le produit tensoriel permet de ramener l'étude des applications bilinéaires à celle des applications linéaires.

Définition 9.3.2. Lorsque M et N sont deux modules sur un même anneau commutatif A, un produit tensoriel de M et N est un couple (E, ϕ), où E est un A-module, $\phi : M \times N \to F$ est une application bilinéaire, qui satisfait la propriété universelle suivante :
Pour toute application bilinéaire $f : M \times N \to F$, il existe une unique application linéaire $g : E \to F$ telle que : $f = g \circ \phi$.

Proposition 9.3.3. *Deux produits tensoriels des A-modules M et N sont canoniquement isomorphes. On dit que le produit tensoriel est unique à isomorphique canonique près.*

Théorème 9.3.4. *Deux modules M et N sur le même anneau commutatif A admettent un produit tensoriel noté $M \otimes_A N = M \otimes N$: le quotient de $C = A^{(M \times N)}$ par le sous-module des éléments de la forme :*

$$\begin{aligned}
&e(x + y, z) - e(x, z) - e(y, z),\\
&e(x, y + z) - e(x, y) - e(x, z),\\
&e(\alpha x, y) - \alpha e(x, y),\\
&e(x, \alpha y) - \alpha e(x, y),
\end{aligned}$$

où $e(x, y)$, $x \in M$, $y \in N$ est la base canonique de C.

La classe de $e(x,y)$ dans $M \otimes N$ sera notée $x \otimes y$.

Théorème 9.3.5. *Soit A une anneau commutatif. Pour tous les ensembles I et J, on a un isomorphisme canonique :*

$$A^{(I)} \otimes A^{(J)} \approx A^{(I \times J)} \ .$$

Corollaire 9.3.6. *Le produit tensoriel de deux modules libres sur un anneau commutatif A est un module libre sur A.*

Théorème 9.3.7. *Si J est un idéal de l'anneau commutatif A, alors $A^{(I)} \otimes A/J$ est un A/J-module et on a un isomorphisme canonique*

$$A/J \otimes A^{(I)} \approx (A/J)^{(I)} \ .$$

Corollaire 9.3.8. *Soit J un idéal de l'anneau commutatif A. Si M un A-module libre, alors $A/J \otimes M$ est un A/J module libre.*

Si S est une partie multiplicative de l'anneau intègre A, on note $S^{-1}M$ le $S^{-1}A$-module des fractions de M à dénominateurs dans S. C'est le quotient de $M \times S$ par la relation :

$$(v,s) \sim (v',s') \leftrightarrow \exists t \in S \ ts'v = tsv' \ .$$

Proposition 9.3.9. *On a un isomorphe canonique $S^{-1}A \otimes M \approx S^{-1}M$.*