

EXAMEN FINAL, MARDI 10 JANVIER 2012

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices **A**, **B** et **C** peuvent être traités indépendamment. L'exercice **D** dépend en partie du **C**. Les résumés de cours sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif : (4+7+2,5+6,5).

A – On pourra éventuellement utiliser les calculs donnés en annexe, ce qui n'exclut pas de justifier les réponses données. Soit A la matrice à coefficient entiers définie par :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -6 & 6 & 12 \\ 10 & -4 & -16 \end{pmatrix}$$

Soit N l'image de $A \in \text{End}(\mathbb{Z}^3)$, et G le quotient : $G = \mathbb{Z}^3/N$.

1. Trouver une base de $\mathbb{Z}^3$ adaptée pour le sous-module N .
2. Montrer que le groupe abélien G est fini. Donner son cardinal et ses facteurs invariants.
3. Quelles sont les composantes primaires de G ?
4. Est-ce que G est isomorphe à $(\mathbb{Z}/12\mathbb{Z})^2$? à $(\mathbb{Z}/6\mathbb{Z})^2 \times \mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$?

Annexe

A
$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 4 \\ -6 & 6 & 12 \\ 10 & -4 & -16 \end{bmatrix}$
<code>[D,U,V]=A.smith_form()</code>
V
$\begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \end{bmatrix}$
A*V
$\begin{bmatrix} 10 & 0 & 12 \\ 0 & 6 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$
U*A*V
$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

B– On étudie les représentations complexes de degré fini du groupe alterné $\mathcal{A}_4$.

1. (a) Montrer que les 3-cycles (123) et (132) sont conjugués dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_4$, mais ne le sont pas dans $\mathcal{A}_4$.
(b) Combien y a-t-il de classes de conjugaison dans $\mathcal{A}_4$?

.../...

2. (a) Montrer que $\mathcal{A}_4$ a un sous-groupe distingué H d'indice 3.
 (b) Décrire les représentations irréductibles de $\mathcal{A}_4/H$.
 (c) Trouver trois représentations irréductibles de degré 1 de $\mathcal{A}_4$ et donner leur caractère.
3. Soit $V = \mathbb{C}^4$ la représentation de $\mathcal{A}_4$ par matrices de permutation : en notant $(e_i)_{1 \leq i \leq 4}$ la base canonique, on a

$$\sigma.e_i = e_{\sigma(i)} .$$

- (a) Montrer que V n'est pas irréductible et que l'hyperplan $\tilde{V}$ d'équation $\sum_{i=1}^4 x_i = 0$ est une sous-représentation irréductible.
- (b) Donner les caractères des représentations V et $\tilde{V}$.
4. Compléter la table des caractères irréductibles de $\mathcal{A}_4$.
5. Décomposer en représentations irréductibles $\tilde{V} \otimes \tilde{V}$.

C— Soient $\mathbb{Q}(b)$ et $\mathbb{Q}(\beta)$, b^2 et β^2 rationnels, deux extensions quadratiques de $\mathbb{Q}$ contenues dans un même corps E .

1. On suppose que $\mathbb{Q}(b) = \mathbb{Q}(\beta) = L$. Soit σ le générateur de $\text{Gal}(L : \mathbb{Q})$.
 Calculer $\frac{\sigma(b)}{\sigma(\beta)}$. En déduire que $\frac{b}{\beta}$ est un nombre rationnel.
2. Démontrer que $\mathbb{Q}(b) = \mathbb{Q}(\beta)$ si et seulement si $\frac{b}{\beta}$ est un nombre rationnel.

D— Soit D un entier relatif distinct de $-1, 0$ et 1 , *sans facteur carré*¹. Soit $K = \mathbb{Q}(d)$, $d^2 = D$, un corps de décomposition de $X^2 - D$.

1. On suppose que $D = s^2 + t^2$ est somme de deux carrés.
 - (a) Démontrer que $D + sd$ n'est pas un carré dans K .
 Soit $L = K(\alpha)$, $\alpha^2 = D + sd$, un corps de décomposition de $X^2 - D - sd$ sur K .
 - (b) Calculer le polynôme minimal de α sur $\mathbb{Q}$.
 - (c) Démontrer que l'extension $(L : \mathbb{Q})$ est galoisienne.
 - (d) Démontrer que l'extension $(L : \mathbb{Q})$ est cyclique de degré 4.
2. Démontrer que si K est contenu dans une extension de $\mathbb{Q}$ qui est cyclique de degré 4, alors D est somme de deux carrés de rationnels.
3. Démontrer que D est somme de deux carrés de nombres rationnels si et seulement si D est somme de deux carrés d'entiers.
4. Parmi les corps $\mathbb{Q}(\sqrt{3})$, $\mathbb{Q}(\sqrt{5})$, $\mathbb{Q}(i\sqrt{5})$, lequel ou lesquels sont contenus dans des extensions cycliques de $\mathbb{Q}$ de degré 4?

1. La valeur absolue est produit de nombres premiers distincts.