

EXAMEN DE SECONDE SESSION, LUNDI 18 JUIN 2012

L'épreuve dure 3 heures. Les résumés de cours sont autorisés. Les parties **A** et **B** peuvent être traitées indépendamment. La partie **C** utilise les précédentes..

A –

- Est-ce que le groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ est isomorphe
 - à $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$?
 - à $\mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/2 \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$?
- Combien le groupe $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ contient-il
 - d'élément d'ordre 2 ?
 - d'éléments d'ordre 4 ?
 - de sous-groupe(s) de cardinal 4 ?
- On note $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ le groupe (multiplicatif) des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.
 - Montrer que les groupes $(\mathbb{Z}/7\mathbb{Z})^\times$ et $(\mathbb{Z}/9\mathbb{Z})^\times$ sont cycliques.
 - Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/63\mathbb{Z})^\times$ est isomorphe au groupe additif $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$.

B– Pour n entier impair supérieur ou égal à 3, on note Φ_n le polynôme cyclotomique d'indice n et Φ_n^+ le polynôme défini par :

$$\Phi_n^+ = \prod_{\substack{1 \leq k \leq \frac{n-1}{2} \\ \text{PGCD}(k,n)=1}} \left(X - 2 \cos\left(\frac{2k\pi}{n}\right) \right).$$

- Rappeler la définition du polynôme Φ_n , et ses propriétés (à quel anneau appartient-il ? irréductibilité ?).
- Montrer que pour tout entier impair $n \geq 3$, on a :

$$X^{\frac{\phi(n)}{2}} \Phi_n^+(X + X^{-1}) = \Phi_n(X).$$

- Calculer Φ_7 , Φ_9 , Φ_7^+ , Φ_9^+ ,
- Etudier l'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ de Φ_7^+ et Φ_9^+ .

C–

Pour n entier impair supérieur ou égal à 3, on note :

$$\zeta_n = e^{\frac{2i\pi}{n}}, \alpha_n = \zeta_n + \zeta_n^{-1}.$$

Soit K le corps $\mathbb{Q}(\zeta_{63})$.

- Est-ce que l'extension $(K : \mathbb{Q})$ est galoisienne ? Décrire son groupe de Galois.
- Combien K contient-il de sous-corps
 - dont il est extension quadratique ?
 - dont il est extension de degré 4 ?
- Montrer que K contient $\mathbb{Q}(\zeta_7)$ et $\mathbb{Q}(\zeta_9)$.
 - Calculer les degrés $[K : \mathbb{Q}(\zeta_7)]$ et $[K : \mathbb{Q}(\zeta_9)]$?
- Montrer que pour tout entier impair $n \geq 3$ l'extension $(\mathbb{Q}(\zeta_n) : \mathbb{Q}(\alpha_n))$ est de degré 2.
- Représenter le diagramme des inclusions pour les corps : $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}(\zeta_7)$, $\mathbb{Q}(\zeta_9)$, K , $\mathbb{Q}(\alpha_7)$, $\mathbb{Q}(\alpha_9)$, $\mathbb{Q}(\alpha_{63})$, $\mathbb{Q}(\alpha_7, \alpha_9)$.
- Est-ce que les corps $\mathbb{Q}(\alpha_{63})$ et $\mathbb{Q}(\alpha_7, \alpha_9)$ sont égaux ?
- Donner la liste des sous-corps de K comptabilisés en 2a) et 2b).