Examen partiel, Mercredi 9 novembre 2011

L'épreuve dure 3 heures. Les exercices **A**, **B** et **C** peuvent être traités indépendamment. Les résumés de cours sont autorisés. Le barème est donné à titre indicatif : 5+6+9.

A –

Soit P dans $\mathbb{F}_5[X]$ le polynôme $X^5 - X - 1$, et K le corps de décomposition de P sur $\mathbb{F}_5$.

1. Montrer que P n'a pas de racine dans $\mathbb{F}_5$.
2. Soit α une racine de P dans K. Montrer que $\alpha + 1$ est aussi racine de P.
3. Quel est le polynôme minimal de α sur $\mathbb{F}_5$? Est-ce que P est irréductible sur $\mathbb{F}_5$?
4. Quel est le degré de l'extension $(K : \mathbb{F}_5)$? Quel est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K : \mathbb{F}_5)$?
5. Décrire l'action du groupe de Galois $\mathrm{Gal}(K : \mathbb{F}_5)$ sur les racines de P.
6. Le polynôme $X^{25} - X - 1$ est-il irréductible sur K ? sur $\mathbb{F}_5$?

B–

Soit $\zeta = e^{\frac{i\pi}{10}}$. Le but de l'exercice est de décrire les corps contenus dans le corps cyclotomique $L = \mathbb{Q}(\zeta)$.

Soit $F = \mathbb{Q}(\nu)$, avec $\nu = e^{\frac{i2\pi}{5}}$.

1. Quel est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(F : \mathbb{Q})$?
2. Trouver un nombre réel non rationnel α dans F.
   Montrer que $\mathbb{Q}(\alpha)$ est une extension galoisienne de $\mathbb{Q}$ et préciser son degré.
3. Quels sont les sous-corps de F ?
4. Quel est le groupe de Galois $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$?
   Montrer que ce groupe est isomorphe au produit de deux groupes cycliques.
5. Décrire tous les corps K contenus dans L. Pour chacun d'eux trouver un élément primitif.

C–

1. Combien existe-t-il de polynômes unitaires de degré 2 irréductibles sur $\mathbb{F}_3$?
2. Démontrer que le polynôme $X^4 + X - 1$ est irréductible sur $\mathbb{F}_3$.
   Soient P et Q les polynômes : $P = X^4 + 4X - 1$ et $Q = X^3 + 4X + 16$.
3. Etudier l'irréductibilité sur $\mathbb{Q}$ des polynômes P et Q.
4. Quelle est la structure du groupe $\mathrm{Gal}(Q)$?
5. Soit α_1, α_2, α_3, α_4 les racines de P dans un corps de décomposition L. On pose :
   $\theta_1 = (\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_3 + \alpha_4)$,
   $\theta_2 = (\alpha_1 + \alpha_3)(\alpha_2 + \alpha_4)$,
   $\theta_3 = (\alpha_1 + \alpha_4)(\alpha_2 + \alpha_3)$.
   (a) On note σ_i, $1 \leq i \leq 3$, les polynômes symétriques élémentaires en trois variables. Démontrer que les $\sigma_i(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$, $1 \leq i \leq 3$, sont des nombres rationnels. Calculer ces nombres.
   (b) Soit $K = \mathbb{Q}(\theta_1, \theta_2, \theta_3)$. Montrer que $\mathrm{Gal}(L : K)$ est isomorphe a un sous-groupe normal du groupe symétrique $\mathcal{S}_4$.
   (c) Déterminer la structure des groupes $\mathrm{Gal}(K : \mathbb{Q})$, $\mathrm{Gal}(L : K)$ et $\mathrm{Gal}(L : \mathbb{Q})$.