Chapitre 1

Espaces affines

1.1 Structure d'espace affine

Le plan et l'espace de la *géométrie élémentaire* (celle qu'on enseigne au collège et au lycée) peuvent être définis de façon axiomatique. A partir de ces axiomes, on construit les vecteurs du plan et de l'espace qui forment des espaces vectoriels réels de dimensions respectives 2 et 3. Notre propos est de faire dans un cadre assez général la démarche inverse : On souhaite étudier des ensembles de points en référence à leur *espace vectoriel associé*. La structure affine codifie cette relation avec l'espace vectoriel associé.

Définition 1.1.1. Soit V un espace vectoriel (réel ou sur un corps $\mathbb{K}$). Un espace affine de direction V est un ensemble non vide E muni d'une application

$$\phi : E \times E \to V \ ,$$

qui satisfait :

1. la relation de Chasles :

$$\forall M \in E,\ \forall N \in E,\ \forall P \in E,\ \phi(M,P) = \phi(M,N) + \phi(N,P)$$

2. pour tout point O dans E, l'application

$$\begin{array}{rccc} \phi_O : & E & \to & V \\ & M & \mapsto & \phi(O,M) \end{array}$$

   est bijective.

Remarque 1.1.2. La notation traditionnelle pour le vecteur $\phi(M,N)$ associé à un bipoint, notamment en géométrie élémentaire, est $\overrightarrow{MN}$. Il est souvent commode de noter $\overrightarrow{E}$ la direction de l'espace affine E.

Remarque 1.1.3. Si l'application ϕ vérifie la relation de Chasles, et s'il existe un point A dans E tel que ϕ_A est bijective, alors pour tout point O l'application ϕ_O est bijective.

Exemple 1.1.4. Soit V un espace vectoriel (réel ou sur un corps $\mathbb{K}$) et $f : V \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle, alors $E = f^{-1}(1) = \{u,\ f(u) = 1\}$ muni de l'application :

$$\phi : (u, v) \mapsto v - u \ ,$$

a une structure d'espace affine de direction $\overrightarrow{E} = f^{-1}(0) = \mathrm{Ker}(f)$.

Exemple 1.1.5. Un espace vectoriel (réel ou sur un corps $\mathbb{K}$) muni de l'application :

$$\phi : (u, v) \mapsto v - u \ ,$$

a une structure d'espace affine de direction lui-même.

Conséquences immédiates de la définition

Dans un espace affine E, on a pour tous points M, N, M', N' :

$$\overrightarrow{MM} = \overrightarrow{0} \ , \ \overrightarrow{NM} = -\overrightarrow{MN} \ ,$$
$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{M'N'} \Leftrightarrow \overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{NN'} \ .$$

Translation

Définition 1.1.6. Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. Pour $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{E}$, on appelle translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ l'application $t_{\overrightarrow{u}} : E \to E$ qui à M associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \overrightarrow{u}$.

Remarque 1.1.7. Le point $M' = t'_{\overrightarrow{u}}(M)$ est noté $M + \overrightarrow{u}$. En algèbre on définira l'action d'un groupe sur un ensemble. Ici le groupe $(\overrightarrow{E}, +)$ agit par translation sur E. Ce langage permet de donner une définition alternative de la structure affine.

Dimension

La dimension d'un espace affine est celle de sa direction. Une droite affine est un espace affine de dimension 1. Un plan affine est un espace affine de dimension 2.

Repère cartésien

Un repère cartésien d'un espace affine E de dimension finie est la donnée d'un point et d'une base de la direction :

$$\mathcal{R} = (O, \mathcal{B}) = (O; e_1, \ldots, e_n) \ .$$

Un point de E est alors déterminé par ses coordonnées.

1.2 Sous-espace affine

Soit E un espace affine de direction $\overrightarrow{E}$. Etant donné un point A de E et un sous-espace vectoriel W de $\overrightarrow{E}$, l'ensemble

$$F = \{M \in E,\ \overrightarrow{AM} \in W\}$$

est un espace affine de direction $\overrightarrow{F} = W$. On le note $A + W$.

Définition 1.2.1. On appelle sous-espace affine d'un espace affine E, tout sous-ensemble de la forme $A + W$.

Un sous-espace affine de E est donc déterminé par un point et une direction qui est un sous-espace vectoriel de $\overrightarrow{E}$.

Remarque 1.2.2. L'exemple 1.1.4 défini par une forme linéaire non nulle sur un espace vectoriel est un sous-espace affine de l'espace vectoriel (considéré comme espace affine). C'est un sous-espace de *codimension* 1 ou hyperplan.

Proposition 1.2.3. *L'intersection de deux sous-espaces affines F et F' est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{F'}$.*

Proposition 1.2.4. *L'intersection de deux sous-espaces affines $F = A + \overrightarrow{F}$ et $F' = A' + \overrightarrow{F'}$ est non vide si et seulement si $\overrightarrow{AA'}$ appartient à $\overrightarrow{F} + \overrightarrow{F'}$.*

Parallélisme

Définition 1.2.5. Deux sous-espaces affines d'un espace affine E sont parallèles si et seulement si leurs directions sont égales.

Proposition 1.2.6. *Par un point donné il passe un unique sous-espace affine parallèle à un sous-espace affine donné.*

Proposition 1.2.7. *Deux sous-espaces affines parallèles distincts ont une intersection vide.*

Représentation paramétrique

Soit E un espace affine de dimension n, muni d'un repère $\mathcal{R} = (0; e_1, \dots, e_n)$.

Un sous-espace affine de dimension k admet une représentation paramétrique de la forme

$$x = At + b\ ,$$

où b représente les coordonnées d'un point, A est la matrice représentant une base de la direction. Ici $x \in \mathbb{K}^n$ est le vecteur des coordonnées d'un point, et $t \in \mathbb{K}^k$ contient k paramètres.

Réciproquement, une telle représentation détermine un sous-espace affine de direction $\mathrm{rg}(A)$.

Equations

Soit E un espace affine de dimension n, muni d'un repère $\mathcal{R} = (0; e_1, \ldots, e_n)$.

Proposition 1.2.8. *Une équation*

$$\sum_{k=0}^{n} \alpha_k x_k = b \ ,$$

où les α_k sont non tous nuls, définit un sous-espace affine de codimension 1 *(i.e. de dimension $n-1$) : un hyperplan affine.*

Proposition 1.2.9. *Un système d'équations qui est compatible (a au moins une solution) :*

$$Ax = b \ ,$$

définit un sous-espace affine de codimension $\mathrm{rg}(A)$.

Exemples en dimension 3

Exercice 1.2.10. Soit E un espace affine réel de dimension 3 et $\mathcal{R} = (O; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien de E. Soit les points

$$A \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad B \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad C \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

les droites

$$D_1 : \begin{cases} x = 3 - \lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = -1 + \lambda \end{cases} \quad (\lambda \in \mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad D_2 : \begin{cases} x = 1 + 3\mu \\ y = -2\mu \\ z = 3 + 5\mu \end{cases} \quad (\mu \in \mathbb{R})$$

les plans

$$P_1 : \begin{cases} x = 1 - 2\lambda + 3\mu \\ y = -2 + \lambda + \mu \\ z = 4 - \lambda - 2\mu \end{cases} \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$$

$$P_2 : \quad 2x - y + 3z - 1 = 0 \ ; \qquad (P_3) \ \ x + 2z - 4 = 0 \, .$$

1. Donner une équation cartésienne de P_1.
2. Déterminer une représentation paramétrique de $P_2 \cap P_3$.
3. Donner une équation cartésienne du plan contenant A, B et C.
4. Déterminer l'intersection de D_1 et de P_2.
5. Donner une équation cartésienne du plan Q passant contenant D_1 et tel que D_2 soit parallèle à Q.
6. Déterminer $P_1 \cap P_2 \cap P_3$.
7. Déterminer l'intersection de P_2 avec la droite (AB).
8. Donner une représentation paramétrique de la droite passant par A, parallèle à P_2 et coupant D_1.
9. Donner une équation cartésienne du plan passant par C et contenant D_1.
10. Déterminer une représentation paramétrique de la droite (si elle existe) passant par A et ayant une intersection non vide avec D_1 et avec D_2.

1.3 Barycentres

Soit E un espace affine sur le corps $\mathbb{K}$. Un système pondéré dans E est une famille finie de points avec coefficients (ou poids) dans $\mathbb{K}$:

$$S = ((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k)) \ .$$

Le poids total du système est la somme : $p = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i$.

Théorème 1.3.1. *Soit $S = ((A_1, \alpha_1), \ldots, (A_k, \alpha_k))$ un système de poids total non nul, alors il existe un unique point G tel que :*

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{GA_i} = \overrightarrow{0} \ .$$

Ce point s'appelle le barycentre du système.

Etant donné un point O, le barycentre G est déterminé par :

$$\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i \right) \overrightarrow{OG} = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \overrightarrow{OA_i} \ .$$

Proposition 1.3.2. *a) Homogénéité : le barycentre n'est pas modifié si on multiplie tous les coefficients par un scalaire non nul. On peut ainsi se ramener à un système de poids total égal à 1.*
b) Associativité : On ne change pas le barycentre en remplaçant un sous-système de poids non nul α par son barycentre avec le coefficient α.

Isobarycentre : tous les coefficients sont égaux (attention à la condition d'existence pour un corps de base $\mathbb{K}$ dont la *caractéristique* est non nulle).
Cas de deux points : le milieu (caractéristique différente de 2).

Proposition 1.3.3 (Caractérisation du parallélogramme)**.** *Dans un espace affine réel ou sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de* 2*,* (A, C) *et* (B, D) *ont même milieu si et seulement si*

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} \ .$$

Exercice 1.3.4. Soient A,B,C et D, quatre points distincts non alignés dans un espace affine réel E, et soient I,J,K et L les milieux respectifs de (A, B),(B, C),(C, D) et (D, A). Démontrer que les droites (IK) et (JL) sont sécantes. Préciser la position de l'intersection. Nature de la figure $IJKL$.

Exercice 1.3.5 (Théorème de Ceva). En géométrie plane réelle, on considère un triangle ABC et des points A', B' et C' distincts des sommets, respectivement sur les droites (BC), (CA), et (AB).

1. Démontrer que si les droites (AA'), (BB') et (CC') sont concourantes, alors

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \times \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \times \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1$$

2. Réciproque.

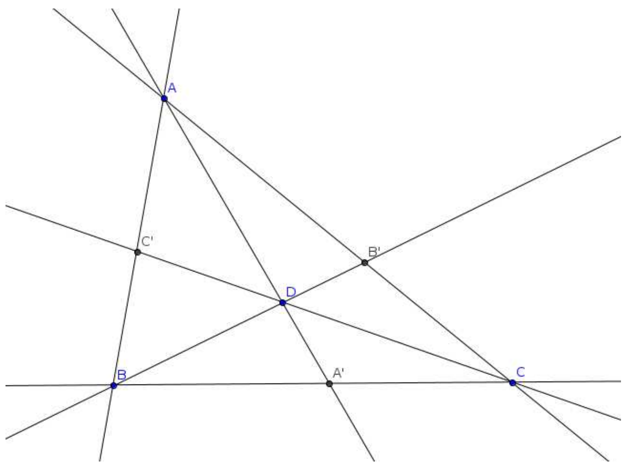

Figure 1.1 – Exercice 1.3.5

Sous-espaces affines et barycentres

Théorème et définition 1.3.1. *Soit X une partie non vide d'un espace affine E. L'ensemble $\mathcal{B}(X)$ des barycentres des points de X est le plus petit sous-espace affine contenant X. C'est le sous-espace affine engendré par X.*
Pour $A \in X$, la direction de $\mathcal{B}(X)$ est le sous-espace vectoriel engendré par $\{\overrightarrow{AM},\ M \in X\}$.

Définition 1.3.6. Les $k+1$ points $A_0, \ldots, A_k$ sont affinement indépendants si et seulement s'ils engendrent un sous-espace affine F de dimension k. On dit alors qu'ils forment un repère affine de F.

La condition équivaut à l'indépendance des vecteurs $\overrightarrow{A_0A_1}, \ldots, \overrightarrow{A_0A_k}$.

Proposition 1.3.7. *Si $(A_0, \ldots, A_k)$ est un repère affine de F, alors tout point de F s'écrit de manière unique comme barycentre des points $A_0, \ldots, A_k$ avec poids total égal à 1. Les coefficients sont appelés les coordonnées barycentriques du point.*

Convexité

En géométrie réelle, le segment $[AB]$ est l'ensemble $\{A + t\overrightarrow{AB},\ 0 \leq t \leq 1\}$. C'est l'ensemble des barycentres des points A et B affectés de coefficients positifs.

Définition 1.3.8. Une partie non vide X d'un espace affine réel est convexe si et seulement si tout segment dont les extrémités sont dans X est contenu dans X.

Proposition 1.3.9. *Une partie non vide X d'un espace affine réel est convexe si et seulement si elle est stable par barycentres à coefficients positifs.*

Théorème et définition 1.3.2. *Pour X non vide dans un espace affine réel E, l'ensemble $\mathcal{C}(X)$ des barycentres des points de X avec coefficients positifs est le plus petit convexe de E contenant X. C'est l'enveloppe convexe de X.*

1.4 Quelques théorèmes classiques en géométrie plane

Théorème de Thalès.
Théorème de Ménélaus.
Théorème de Ceva.