Chapitre 2

Applications affines

2.1 Notions générales

Définition 2.1.1. Soit E et F des espaces affines sur $\mathbb{K}$. Une application $f : E \to F$ est affine si et seulement s'il existe une application linéaire $\phi : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ telle que :

$$\forall M \in E,\ \forall N \in E,\ \phi(\overrightarrow{MN}) = \overrightarrow{f(M)f(N)}\ .$$

L'application ϕ est unique et noté $\overrightarrow{f}$.

Proposition 2.1.2. *Soit $O \in E$ un point fixé, alors $f : E \to F$ est affine si et seulement si l'application $\phi : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ défini par $\phi(\overrightarrow{OM}) = \overrightarrow{f(O)f(M)}$ est linéaire.*

Corollaire 2.1.3. *Soient $O \in E$, $O' \in F$ des points fixés et $\phi : \overrightarrow{E} \to \overrightarrow{F}$ une application linéaire, alors l'application $f : E \to F$ définie par :*

$$f(M) = O' + \phi(\overrightarrow{OM})\ .$$

est affine. C'est l'unique application affine d'application linéaire associée ϕ qui transforme O en O'

En dimension finie l'expression analytique de f (expression en fonction des coordonnées dans des repères cartésiens) est de la forme :

$$Y = AX + b\ ,$$

et une telle expression définit une application affine. Ici A est la matrice de l'application linéaire associée et b est formé des coordonnées de l'image de l'origine.

Applications affines et barycentres

Proposition 2.1.4. *Une application est affine si et seulement si elle conserve les barycentres.*

Remarque 2.1.5. Il suffit qu'elle respecte les barycentres de deux ou trois points.

Applications affines et sous-espaces affines

Théorème 2.1.6. *Soit $f : E \to E'$ une application affine.*
a) L'image par f d'un sous-espace affine F de E est un sous espace affine de direction $\overrightarrow{f}(\overrightarrow{F})$.
b) L'image inverse par f d'un sous-espace affine F' de E' est soit vide, soit un sous-espace affine de direction $(\overrightarrow{f})^{-1}(\overrightarrow{F'})$

Corollaire 2.1.7. *Une application affine conserve le parallélisme.*

Corollaire 2.1.8. *Une application affine est surjective (respectivement injective) si et seulement si son application linéaire associée l'est.*

Points invariants

Etant donné $f : E \to E$, on note $\mathrm{Inv}(f) = \{M,\ f(M) = M\}$ l'ensemble des points invariants.

Proposition 2.1.9. *Pour une application affine $f : E \to E$, $\mathrm{Inv}(f)$ est soit vide, soit un sous-espace affine de direction le sous-espace propre $\mathrm{Ker}(\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}})$.*

Théorème 2.1.10. *Soit $f : E \to E$ une application affine. Si $\overrightarrow{f} - \overrightarrow{\mathrm{Id}}$ est bijective, en particulier si E est de dimension finie et si 1 n'est pas valeur propre, alors f admet un unique point invariant.*

2.1.1 Composition des applications affines

Proposition 2.1.11. *a) La composé de deux applications affines f et g est affine et $\overrightarrow{g \circ f} = \overrightarrow{g} \circ \overrightarrow{f}$.*
b) L'application réciproque d'une application affine bijective f est affine, et $\overrightarrow{f^{-1}} = \left(\overrightarrow{f}\right)^{-1}$.

Corollaire 2.1.12. *Les applications affines bijectives de E dans lui même forme un groupe noté $GA(E)$, et l'application linéaire associée définit un morphisme de groupe : $GA(E) \to GL(\overrightarrow{E})$, surjectif de noyau les translations.*

2.2 Etude géométrique des applications affines

Les homothétie-translations

Proposition 2.2.1. *a) Une application affine $f : E \to E$ est une translation si et seulement si son application linéaire associée est l'identité.*
b)Pour $\lambda \notin \{0, 1\}$, une application affine $f : E \to E$ est une homothétie de rapport λ si et seulement si son application linéaire associée est $\lambda\overrightarrow{\mathrm{Id}}$.
c) Une application affine $f : E \to E$ est une homothétie ou une translation si et seulement si son application linéaire associée est scalaire non nulle : $\lambda\overrightarrow{\mathrm{Id}}$, avec $\lambda \neq 0$.

Corollaire 2.2.2. *Les homothétie-translations forment un groupe.*

Proposition 2.2.3. *Les homothéties et les translations transforment une droite (respectivement un sous-espace affine) en une droite parallèle ((respectivement un sous-espace affine parallèle).*

Exercice 2.2.4. Soit E un espace affine de dimension au moins égale à 2. Démontrer qu'une application affine $f : E \to E$ qui transforme toute droite en une droite parallèle est une homothétie ou une translation.

Discussion de la composition d'homothéties et de translations. Construction du centre d'une homothétie. Application : le théorème de Ménélaus via les homothéties.

Exercice 2.2.5. Démontrer que si A, B, A', B' sont quatre points distincts tels que les droites (AB) et $(A'B')$ sont parallèles, alors il existe une unique homothétie-translation qui transforme (A, B) en (A', B'). A quelle condition est-ce une homothétie ? Dans le cas de la géométrie réelle, construire le centre de l'homothétie (distinguer les cas non alignés et alignés).

Les projections

Définition 2.2.6. Dans un espace affine E, soient F un sous-espace affine et $\overrightarrow{G}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{F}$ dans $\overrightarrow{E}$. La projection sur F de direction $\overrightarrow{G}$ associe à tout point M l'unique intersection M' de F avec $M + \overrightarrow{G}$.

Proposition 2.2.7. *a) La projection p sur F de direction $\overrightarrow{G}$ est une application affine, et $\overrightarrow{p}$ est la projection vectorielle sur $\overrightarrow{F}$ suivant $\overrightarrow{G}$.*
b) $p \circ p = p$.

Théorème 2.2.8. *Une application affine $f : E \to E$ telle que $f \circ f = f$ est une projection sur $F = \mathrm{Im}(f) = \mathrm{Inv}(f)$, de direction le noyau de $\overrightarrow{f}$.*

Théorème 2.2.9. *Si f est une application affine dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une projection vectorielle, alors il existe une unique décomposition*

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ p \ ,$$

où le vecteur de la tranlation $t_{\overrightarrow{u}}$ est invariant par $\overrightarrow{f}$, et p est une projection.
De plus cette décomposition commute : $f = p \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

Les symétries

Définition 2.2.10. Dans un espace affine E sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique différente de 2, soient F un sous-espace affine et $\overrightarrow{G}$ un sous-espace vectoriel supplémentaire de $\overrightarrow{F}$ dans $\overrightarrow{E}$. La symétrie par rapport à F de direction $\overrightarrow{G}$ associe à tout point M l'unique point M' tel que le milieu de (M, M') appartient à F, et $\overrightarrow{MM'} \in \overrightarrow{G}$.

Proposition 2.2.11. *a) La symétrie s par rapport à F de direction $\overrightarrow{G}$ est une application affine, et $\overrightarrow{s}$ est la symétrie vectorielle par rapport à $\overrightarrow{F}$ suivant $\overrightarrow{G}$.*
b) s est involutive : $s \circ p = \mathrm{Id}$.

Théorème 2.2.12. *Une application affine $f : E \to E$ telle que $f \circ f = \mathrm{Id}$ est une symétrie par rapport à $F = \mathrm{Inv}(f)$, de direction le noyau de $\overrightarrow{f} + \overrightarrow{\mathrm{Id}}$.*

Théorème 2.2.13. *Si f est une application affine dont l'application linéaire associée $\overrightarrow{f}$ est une symétrie vectorielle, alors il existe une unique décomposition*

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ s \ ,$$

où le vecteur de la tranlation $t_{\overrightarrow{u}}$ est invariant par $\overrightarrow{f}$, et s est une symétrie.
De plus cette décomposition commute : $f = s \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

Forme réduite d'une application affine

Théorème 2.2.14. *Soient E un espace affine de dimension finie, et $f : E \to E$ une application affine. Alors il existe une unique décomposition*

$$f = t_{\overrightarrow{u}} \circ g \ ,$$

où le vecteur de la tranlation $t_{\overrightarrow{u}}$ est invariant par $\overrightarrow{f}$, et g est une application affine avec au moins un point invariant.
De plus cette décomposition commute : $f = g \circ t_{\overrightarrow{u}}$.

Exercice 2.2.15. 1.32 dans la référence de Michelle Audin.
2.16 dans la référence de Bruno Aebischer.

2.3 Quelques théorème classiques

Thalès en grande dimension

Théorème 2.3.1. *Soient D et D' deux droites d'un espace affine E de dimension supérieure ou égale à 2, coupées par trois hyperplans strictement parallèles respectivement en A,B,C et A',B',C' alors :*

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'C'}}{\overline{A'B'}} \ .$$

Remarque 2.3.2. L'espace affine E peut être de dimension infinie. Un hyperplan est alors un sous-espace qui admet une direction supplémentaire de dimension 1.

Un cas du théorème de Desargues

Théorème 2.3.3. *Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles d'un espace affine, sans sommet commun et aux cotés respectifs parallèles : (AB), (BC) et (CA) sont paralllèles respectivement à $(A'B')$, $(B'C')$ et $(C'A')$. Alors les droites (AA'), (BB') et (CC') sont parallèles ou concourantes.*

Exercice 2.3.4. Etudier la configuration de deux triangles sans sommet commun dont les cotés respectifs s'intersectent en trois points alignés.

Un cas du théorème de Pappus

Théorème 2.3.5. *Soient D et D' deux droites distinctes d'un plan affine sur un corps commutatif, A,B,C et A',B',C' des points distincts respectivement sur D et sur D'. Si $(AB') \parallel (A'B)$ et $(BC') \parallel (B'C)$ alors $(AC') \parallel (CA')$.*

Exercice 2.3.6. Etudier la configuration précédente avec l'hypothèse que $(AB') \cap (A'B) = \{I\}$ et $(BC') \cap (B'C) = \{J\}$.